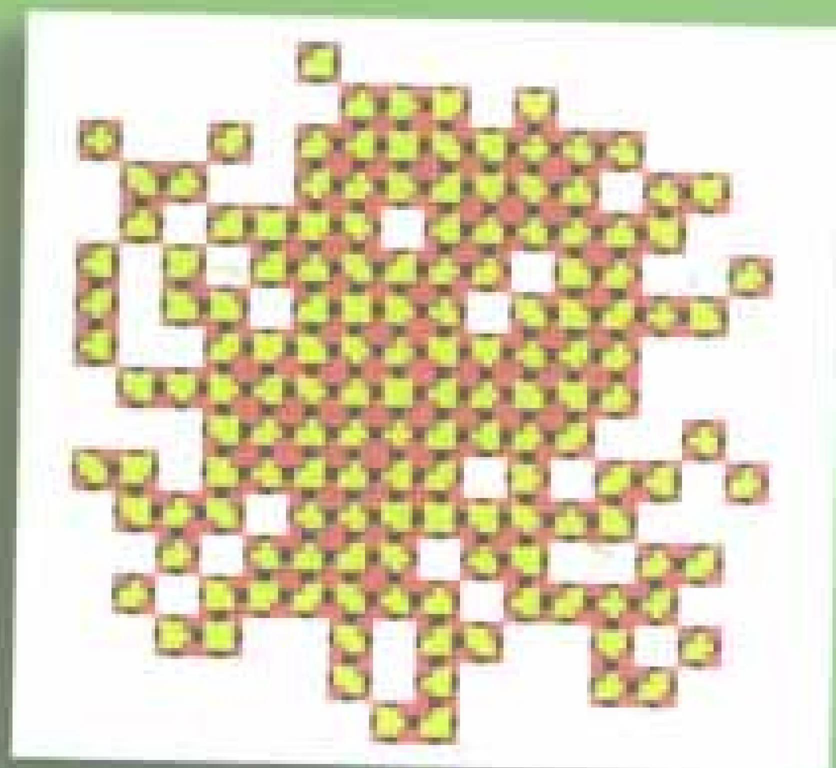
随机过程论

（第二版）

钱敏平　龚光鲁　著



北京大学出版社

随机过程论

第 二 版

钱敏平 龚光鲁 著

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

随机过程论/钱敏平,龚光鲁著.—二版.—北京:北京大学出版社,1997.10
ISBN 7-301-03547-0

Ⅰ.随… Ⅱ.①钱… ②龚… Ⅲ.随机过程-概论 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 20994 号

书　　名:随机过程论(第二版)
著作责任者:钱敏平　龚光鲁
责 任 编 辑:王明舟
标 准 书 号:ISBN 7-301-03547-0/O·404
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话:出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752032
排　印　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
850×1168　32 开本　13.125 印张　320 千字
1997 年 10 月第二版　2000 年 10 月第二次印刷
定　　价:20.00 元

内 容 提 要

本书是随机过程论的基础入门读物. 主要讲授随机过程论的基本理论和方法，包括：基本概念、鞅论、马氏链、Q-过程、Brown 运动、马氏过程、相互作用粒子系、渗流与点过程的数学模型、扩散过程与随机分析、平稳过程与遍历理论等.

本书兼顾严格的数学论证与阐明理论的来源、背景及模型，反映了近年来的新成果、观点与倾向，对一些基本的经典问题采用了新的处理方法.

本书可供高等院校高年级学生、研究生及一般科技工作者学习参考.

序 言

近三十年来，随机过程论在理论与应用两方面都发展迅速. 学习、了解这个学科不仅对于概率统计方面的工作者是必要的，而且对数学的其它分支、自然科学、工程技术，乃至经济管理等方面的学者及科技工作者都是重要而有益的. 这方面的有关教材无论中文的或外文的都已不少，它们各有特色. 在这众多的教材出现之后，笔者又以本书奉献给读者，希望在两个方面有其特点. 其一是：过去的教材大都属于两类之一，一类是严格的数学论述；另一类偏重应用，但不求数学严格性. 本书力图能兼顾二者，一方面尽量阐明理论的来源、背景及模型；另一方面，对基本的理论又给出严格的数学定义、定理及论证，以期适应理论与应用两方面读者的需要. 读者可以根据自己的情况各择所好，各取所需. 本书追求的另一点是：尽量使近年来随机过程发展的新成果、观点与倾向能在书中有所反应. 对一些基本的经典问题，我们采用一些不同于传统的新处理方法. 例如对马氏链转移阵的极限定理，我们采用“耦合”这一近年来应用较广的方法证明；又例如对 Brown 运动的许多性质，我们更多地利用了鞅方法去论证等等. 对一些在随机过程论中近二十年来新发展的方向，如点过程、相互作用粒子系统、渗流等问题，我们在第七章中作一点浅显的介绍，希望使读者对这些领域中研究的模型、思想、问题与方向的概貌有所了解. 若它能引起一些读者的兴趣，并吸引他们进而去学习那里指出的参考文献，则我们将为达到了写作意图而欣慰. 遍历论是近十几年来发展很快，既与随机过程紧密联系，又独立于后者的一个数学分支. 本书第九章中讨论了遍历论的基本概念，并研究了熵与次可加遍历定理. 为了使读者更好地理解遍历及遍历测度等基本问题，我们在第三章马氏链的研究中加入了强遍历性，以使读者有一个具体的形象. 我们

认为这些对于随机过程的研究也是重要和有益的.

本书希望对熟悉初等概率论与测度论的读者尽量做到自封.附录中列出了一些最常用的测度论的事实.由于篇幅所限,我们略去个别定理的证明,或只指出其证明概要,读者可参考书中指出的有关文献.

本书是由笔者 1982 年以来在北京大学及 1988 年在清华大学讲授"随机过程"课程的讲义改写而成的.在此,我们要感谢北京大学概率统计系、数学系及清华大学数学系.由于他们的安排与鼓励,使笔者有机会完成本书的写作,并在教学实践中予以反复使用和修改.我们也要感谢各次参加听课的学生,由于他们仔细阅读原来的讲义,提出问题,使我们纠正了不少不妥之处.

我们特别要感谢郭懋正同志,他以异常的耐心,反复阅读了原稿,提出了许多非常宝贵的修改意见.邓迎春同志整理并抄写了原稿.在此我们对他们辛苦而细致的工作深表谢意.

由于笔者的水平所限,本书的错误、缺点、不妥之处在所难免.我们衷心欢迎读者批评指正.

笔　者

1988 年 10 月于北大

第二版序

在本书第二版中，我们修改了第一版中出现的不少疏忽或遗漏等失误之处．再则，为了便于读者与其它书本的衔接，我们增加了随机过程可分性的叙述，并增列了一些与本书有关的参考文献，在本书的最后，我们增补了一个有关独立增量过程的附录．在这个附录中，我们列出了独立增量过程常用的一些事实以及稳定过程的定义与例子．

目　录

第一章　引　论

§1　随机过程的概念与例子

1. 随机过程的概念

考虑一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，其中Ω是一个集合，$\mathscr{F}$是由Ω的某些子集所组成的一个σ-代数，P是在可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上定义的一个概率测度. 设T是一个指标集，又设有一族$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量$\xi=\{\xi(t,\cdot);t\in T\}$，形式地，我们称$\xi$是一个参数取值于$T$的随机过程. 通常$T$代表时间，它可取为实数集$\boldsymbol{R}$，非负实数集$\boldsymbol{R}^+$，整数集$\mathbf{Z}$，或非负整数集$\mathbf{Z}^+$等. 当$T$取为$\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{R}^+$或$[a,b]$（区间）时，称$\xi$为连续参数的随机过程；当$T$取为$\mathbf{Z}$或$\mathbf{Z}^+$时，称$\xi$为离散参数的随机过程；当$T$取为$\boldsymbol{R}^n$,$\boldsymbol{Z}^n$,$(\boldsymbol{R}^+)^n$或$(\boldsymbol{Z}^+)^n(n\geqslant 2)$时，就称$\xi$为**随机场**. 在本书中，我们主要是研究前两类情况. 一般地，可以将随机过程的定义推广，也就是说$\xi(t,\omega)$并不一定取实值，也可以取复值、向量值，甚至可以取值于抽象的可测空间$(\mathscr{S},\Sigma)$，这里$\mathscr{S}$称为随机过程ξ的**状态空间**. 这样随机过程可以一般地定义为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一族以T为指标集的随机元$\xi=\{\xi(t,\cdot);t\in T\}$，其中对固定的$t$，$\xi(t,\cdot)$是一个**随机元**（即$\xi(t,\cdot)$是$(\Omega,\mathscr{F})$到某个可测空间$(\mathscr{S},\Sigma)$的一个可测映射）. 作为特例$\mathscr{S}=\boldsymbol{R},\Sigma=\mathscr{B}_1$（一元 Borel 集类）与$\mathscr{S}=\boldsymbol{C}$（$\boldsymbol{C}$为复数集），$\Sigma=\mathscr{B}_C$（复数的 Borel 域）分别是$\xi(t,\cdot)$为实的随机变量与复的随机变量的情况.

有时从另一个角度来看随机过程是很有益的，这就是把ξ当

成 $T\times\Omega$ 到 $\mathscr{S}$ 的映射，使得对固定的 $t\in T$，$\xi(t,\cdot)$是$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\mathscr{S},\Sigma)$的可测变换；而固定 $\omega\in\Omega$ 时，$\xi(\cdot,\omega)$是一个 T 上的函数. 若令 X 是 T 上取值于 $\mathscr{S}$ 的函数所组成的空间，ξ 也是$(\Omega,\mathscr{F})$到 X 的映射，在不同的条件下，X 可以是各种不同的函数空间. 在一定的意义下，随机过程的基础理论可以说是函数空间上的测度论. 当然，离开了概率思想和模型，忽视随机过程的物理、工程、经济等实际背景，片面地把它当作测度论，随机过程的研究就会失去动力、方向及直观启发的光华。

2. 例

在实际问题中，往往一开始并不清楚有一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，而只是从直观上看到一族"随机地"变化的量. 这并非意味着我们已经有了一族随机变量，或者随机过程，因为随机变量与随机过程都必须在一个概率空间中来谈. 然而，通过分析，往往可以知道上述那族"随机地"变化的量中任意有限个的联合分布. 当 T 是有限集，这意味着已知这族"随机量"的联合分布. 这时，由标准的处理方法，容易构造一个概率空间及其上的一族以 T 为参数集(有限)的随机变量，使得它们的联合分布正是前面说的那个由直观得到的分布. 这样，我们就将直观上看到的那族"随机量"纳入严格的数学模型，因而可以由此进一步作数学的演绎与论证. 但是，一般我们真正有兴趣的 T 是无限集，这时构造概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$就不那么简单了. 下面我们先来考察一些例子，以期使读者能对上述将实际问题如何化为随机过程的模型的过程有所感受；然后，再在理论上论证这种做法的可能性与合理性.

例 1(Bernoulli 序列)　某人从装有 M 个红球和 N 个白球的袋中，重复作放回抽取. 若将抽到红球记为 0，白球记为 1，那么每次的抽取结果是随机的. 不难看出第 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 次的结果依次是 $a_1,a_2,\cdots,a_s$($a_i=0$ 或 1)的概率为

$$p^{a_1+a_2+\cdots+a_s}q^{s-(a_1+a_2+\cdots+a_s)},\tag{1.1}$$

其中

$$p=\frac{N}{N+M},\quad q=1-p.$$

要把这个问题纳入上述框架，就是要由此定义一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，及其上的随机变量序列$\xi(1,\cdot),\xi(2,\cdot),\cdots,\xi(n,\cdot),\cdots$,使得对任意$s$个整数$n_1,n_2,\cdots,n_s,\xi_{n_1},\xi_{n_2},\cdots,\xi_{n_s}$①的联合分布如(1.1)所规定. 为此,令

$$\Omega=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots);a_i=0,1,i\geqslant 1\}.$$

由下节的定理可知：存在唯一的一个概率测度P，使得对一切$s\geqslant 1,a_i=0$或1的各种可能,下式成立：

$$\begin{aligned}&P(\{\omega=\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_s,\cdots);\omega_i=a_i,i=1,2,\cdots,s\})\\&=p^{a_1+a_2+\cdots+a_s}q^{s-(a_1+a_2+\cdots+a_s)}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

令$\mathscr{F}$是Ω的全体柱集生成的σ-代数. 于是,若在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上定义

$$\xi(t,\omega)=\omega_t\quad(t\in\mathbf{Z}^+),$$

则$\xi=\{\xi(t,\cdot);t\in\mathbf{Z}^+\}$就是用来表达各次抽取结果的随机变量族.

例 2(随机徘徊)　在上例中,若有某人在一个直线格子点上,从原点出发,按每次抽取的结果是白或红而决定向前或向后走一步,我们则称此人在作随机徘徊. 若将此人在时刻t所在的格点的坐标记为$X(t,\cdot)$,易知

$$X(t,\omega)=\sum_{n=1}^{t}(2\xi(n,\omega)-1)\quad(t\geqslant 1),\quad X(0,\omega)=0,$$

$X=\{X(t,\omega);t=0,1,2,\cdots\}$也是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个随机过程.

例 3(Poisson 过程)　考虑盖克计数器接收随机的宇宙射线粒子,记在时间区间$(0,t]$中所接收到的粒子总数为ξ_t,可以看出$\{\xi_t;t\in[0,\infty)\}(\xi_0=0,\exists\ t$使$P(\xi_t\neq 0)>0)$是一族随机地变化的

---

① $\xi_{n_1}=\xi(n_1,\cdot)$等,以后不再声明.

量，而且

1）在不相交的任意有限个区间中所接收到的粒子数是相互独立的；

2）在$(t,t+h]$中所接收的粒子数$\xi_{t+h}-\xi_t$的分布应与t无关；

3）在$(t,t+h]$中所接收的粒子数超过1的概率是$o(h)(h\to 0)$，而且有限时间只能接收有限个粒子.

下面，我们将由这三个基本假定出发来算出$p_m(t)\triangleq P(\xi_t=m)$. 显然由1)，2)与3)，我们有：

$$\sum_{m=0}^{\infty}p_m(t)=1; \tag{1.3}$$

$$p_0(0)=1,\quad p_m(0)=0\quad(m\geqslant 1); \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}p_0(t+h)&=P(\xi_{t+h}=0)=P(\xi_t=0,\xi_{t+h}-\xi_t=0)\\&=P(\xi_t=0)P(\xi_{t+h}-\xi_t=0)\\&=p_0(t)p_0(h);\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$p_m(t+h)=p_m(t)p_0(h)+p_{m-1}(t)p_1(h)+o(h). \tag{1.6}$$

由条件1)～3)，可以证明（见习题4）

$$0<\lambda\triangleq\lim_{h\downarrow 0}\frac{1-p_0(h)}{h}<+\infty.$$

于是，由(1.5)与(1.6)易得

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t}=-\lambda p_0(t), \tag{1.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_m}{\mathrm{d}t}=-\lambda p_m(t)+\lambda p_{m-1}(t). \tag{1.8}$$

解带初始条件(1.4)的微分方程(1.7)与(1.8)可得

$$p_0(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad p_m(t)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\quad(m\geqslant 1),$$

这里的λ称为Poisson过程的强度参数. 从而由$\xi_{t_1},\xi_{t_2}-\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_s}-\xi_{t_{s-1}}$相互独立（即条件1)），容易求出$\xi_{t_1},\xi_{t_2},\cdots,\xi_{t_s}$的联合分布. 由这些联合分布进一步构造概率空间与随机变量的问题将在

§1.2 中统一地解决.

例 4(Brown 运动)　一个粒子在直线上随机地运动，将其在时刻 t 的位置记为 B_t. 设

1) 粒子在任意有限个互不相交的时间区间上的位移都相互独立. 不失一般性，不妨设 $B_0=0$；

2) $B_{t+h}-B_t$ 的分布与 t 无关，具有零均值，而且

$$\lim_{h\downarrow 0}E|B_{t+h}-B_t|^3/h=0; \tag{1.9}$$

3) 作为粒子的位置 B_t，它应对 t 连续.

从上面的假设 1)与 2)，容易看出

$$E|B_t|^2\leqslant E(|B_t|\vee 1)^2\leqslant E(|B_t|\vee 1)^3$$
$$\leqslant 1+E|B_t|^3<+\infty.$$

然而，若记 $\sigma(t)\equiv E|B_t|^2$，利用 2)得到

$$\begin{aligned}|\sigma(t)-\sigma(s)|&\leqslant E|(B_t-B_s)(B_t+B_s)|\\&\leqslant[E|B_t-B_s|^2(2E|B_t|^2+2E|B_s|^2)]^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\sqrt{2}[(E|B_t-B_s|^{2\left(\frac{3}{2}\right)}E|B_t-B_s|^{2\left(\frac{1}{2}\right)})^{\frac{1}{2}}\\&\quad\times(E|B_t|^2+E|B_s|^2)]^{\frac{1}{2}}\\&\to 0\quad(t-s\to 0).\end{aligned}$$

这就得到了 $\sigma(t)$对 t 的连续性. 此外，我们还有

$$\begin{aligned}\sigma(t+s)&=E|B_{t+s}|^2\\&=E|B_{t+s}-B_t|^2+2E[(B_{t+s}-B_t)(B_t-B_0)]+E|B_t|^2\\&=\sigma(s)+\sigma(t).\end{aligned}$$

这样，我们就有

$$\sigma(t)=at.$$

取适当的单位，可得 $a=1$，这就有 $\sigma(t)=t$.

现在我们来考查 $B_{t+s}-B_t$ 的分布. 令

$$\varphi(s,\lambda)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(B_s-B_0)}).$$

由 1)，我们有

$$\begin{aligned}\varphi(t+s,\lambda)-\varphi(t,\lambda) &= E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(B_t-B_0)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(B_{t+s}-B_t)}-1)] \\ &= E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda B_t})E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(B_s-B_0)}-1) \\ &= \varphi(t,\lambda)E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda B_t}-1).\end{aligned}$$

由于

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}=1+\mathrm{i}v+\frac{v^2}{2}+c(v),$$

其中

$$|c(v)|\leqslant \text{常数}\cdot|v|^3,$$

我们可以看出

$$\begin{aligned}E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda B_s}-1) &= \mathrm{i}\lambda EB_s-\frac{1}{2}\lambda^2EB_s^2+E(c(\lambda B_s)) \\ &= 0-\frac{1}{2}\lambda^2 s+E(c(\lambda B_s)).\end{aligned}$$

但由(1.9)可以得到

$$\frac{E(c(\lambda(B_s))}{s}\to 0,$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\lambda) &= \lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}(\varphi(t+s,\lambda)-\varphi(t,\lambda)) \\ &= -\frac{1}{2}\lambda^2\varphi(t,\lambda).\end{aligned}$$

可见

$$\varphi(t,\lambda)=\varphi(0,\lambda)\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}.$$

又由于

$$\varphi(0,\lambda)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(B_0-B_0)})=1,$$

就有

$$\varphi(t,\lambda)=\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2 t}{2}},$$

即 $B_{t+s}-B_s$ 的分布为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}$.

这样，我们便由 1)，得到 $B_{t_1},\cdots,B_{t_n}$的联合分布密度是

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(2\pi(t_k-t_{k-1}))^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{t_1}+\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\cdots+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right)\right),$$

其中 $t_0=0, 0<t_1<t_2<\cdots<t_n$.

Brown 运动是一个十分重要的连续时间与连续状态空间的随机过程的例子. 很多重要的随机过程都可以看成是它在某种意义下的泛函或推广，因而，在第四章中，我们将进一步研究它.

从上面各例，可以看到，要把实际问题纳入我们在本节一开始提出的随机过程这一概率模型，首先就必须设法建立一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及其上的一族随机元，使得这族随机元中的任何有限个的联合分布都与我们在初步直观分析中所得到的那些相同. 一般来说，Ω 并不难得到(例如取 $\Omega=\mathscr{S}^T$)，主要难点在 P 的构造. 再则，由于在实际问题中，像前面所举的那些例子一样，一般我们只能知道一些有限维分布，为了保证 P 由这些有限维分布唯一决定，我们常取 Ω 中有限维柱集所张成的最小 σ-代数(记为 σ(柱集))作为 $\mathscr{F}$.

§2 Kolmogorov 定理与可分性

1. Kolmogorov 定理

本节的定理从理论上证明了上段所希望找到的概率测度 P 的存在性.

设有$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于状态空间$(\mathscr{S},\Sigma)$的随机过程 $\xi=\{\xi(t,\cdot);t\in T\}$. 对任意的正整数 n 及 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，随机元$(\xi(t_1,\cdot),\cdots,\xi(t_n,\cdot))$的概率分布(或者说 $\xi(t_1,\cdot),\xi(t_2,\cdot)$,

$\cdots,\xi(t_n,\cdot)$的联合分布)就是$(\mathscr{S}^n,\Sigma^n)$上的概率测度$p_{t_1,\cdots,t_n}(\cdot)$:

$$p_{t_1,\cdots,t_n}(B)\triangleq P(\{\omega:(\xi(t_1,\omega),\cdots,\xi(t_n,\omega))\in B\}),$$

其中$B\in\Sigma^n$.我们称$p_{t_1,\cdots,t_n}(\cdot)$为$\xi$在"时刻"$t_1,t_2,\cdots,t_n$的边缘测度.显然,边缘测度族$\{p_{t_1,\cdots,t_n}(\cdot);n\geqslant1,t_1,\cdots,t_n\in T$且互不相同$\}$具有以下性质:

$K.1)$ $p_{t_1,\cdots,t_n,\cdots,t_{n+m}}(B\times\mathscr{S}^m)=p_{t_1,\cdots,t_n}(B)$,其中$B\in\Sigma^n$;

$K.2)$ 设有$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列$\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}$,令ρ为如下集合变换:

$$\rho B\triangleq\{(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n});(x_1,\cdots,x_n)\in B\},$$

则
$$p_{t_1,\cdots,t_n}(B)=p_{t_{i_1},\cdots,t_{i_n}}(\rho B)).$$

我们称条件1)与2)为Kolmogorov相容性条件.我们现在要讨论问题的反面:给定了满足$K.1)$与$K.2)$的一族分布,是否一定可以找到概率测度P使$K.1)$与$K.2)$在P下满足呢?下面的定理对此问题作了肯定的回答.

设$\mathscr{S}$是一个完备可分度量空间,Σ是由$\mathscr{S}$的开子集所生成的最小σ-代数($(\mathscr{S},\Sigma)$也称**Polish空间**),Σ^n是$\mathscr{S}^n$的开集所生成的σ-代数.

我们称下面这样的集合为柱集:

$$C_{t_1,\cdots,t_n}(B)\triangleq\{\omega=(\omega_t;t\in T)\in\mathscr{S}^T;(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n})\in B\},$$

其中$B\in\Sigma^n$,而$t_1,\cdots,t_n\in T$且彼此不同.令

$$\mathscr{C}=\{C_{t_1,\cdots,t_n}(B);B\in\Sigma^n,\forall\ t_1,\cdots,t_n\in T\text{彼此不同},n\geqslant1\}.$$

取
$$\Omega=\mathscr{S}^T,\quad\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{C}).$$

下面的Kolmogorov定理给出了由有限维联合分布族构造$(\Omega,\mathscr{F})$上测度P的方法.

定理1.1(Kolmogorov) 设$\mathscr{S}$是一个完备可分可测度量空间即Polish空间,概率分布族

$$\{p_{t_1,\cdots,t_n}(\cdot);n\geqslant1,\forall\ t_1,\cdots,t_n\in T\text{彼此不同}\}$$

满足$K.1)$与$K.2)$,则存在$(\Omega,\mathscr{F})$上唯一的概率测度P,使得

$$P(\omega=(\omega_t;t\in T);(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n})\in B)=p_{t_1,\cdots,t_n}(B) \quad (1.10)$$

对一切 $n\geqslant 1$，彼此不同的 $t_1,\cdots,t_n\in T$，以及 $B\in\Sigma^n$ 都成立.

证明 事实上，$K.1$)与 $K.2$)保证了(1.10)式可以无矛盾地在 $\mathscr{C}$ 上定义唯一一个有限可加集合函数，我们仍将它记为 $P(\cdot)$. 又因为 $\mathscr{C}$ 是半环，如果我们能证明这个集合函数是 σ-可加的，那么由测度的扩张定理，立即可以得到 $\sigma(\mathscr{C})$上唯一的概率测度，使得(1.10)成立.

为证明 σ-可加性，只需证明：若有 $C_n\in\mathscr{C}$，$C_n\downarrow\varnothing$，则

$$\lim_{n\to\infty}P(C_n)=0. \quad (1.11)$$

事实上，由于$\{C_n\}$的全体最多只涉及可列个 T 中的指标，设它们是$(t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots)$；又由于低维柱集也是高维柱集，不失一般性，我们不妨设

$$C_n=\{\omega=(\omega_t,t\in T);\quad(\omega_{t_1},\omega_{t_2},\cdots,\omega_{t_n})\in B_n\}.$$

设(1.11)不成立，则不妨设

$$P(C_n)\geqslant\epsilon>0\quad(\forall n\geqslant 1),$$

我们将证明 $\bigcap_n C_n\neq\varnothing$. 若 C_n 是紧集，显然 $\bigcap_n C_n\neq\varnothing$. 由于 B_n 是 n 元 Borel 集，因而存在紧集 $K_n\subset B_n$，使

$$p_{t_1,\cdots,t_n}(B_n-K_n)<\frac{\epsilon}{2^{n+1}} \quad (1.12)$$

(这是定理 6.16(见 247 页)的特例).

令 $D_n=\{\omega=(\omega_t;t\in T);(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n})\in K_n\}$，为了使 D_n 单调，令

$$\tilde{D}_n=\prod_{k=1}^{n}D_k=\prod_{s=1}^{n}\{\omega;(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_s})\in K_s\}$$

$$=\left\{\omega;(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n})\in\prod_{s=1}^{n}(K_s\times\mathscr{S}^{n-s})\right\},$$

那么，$P(\tilde{D}_n)>\frac{\epsilon}{2}>0$. 这是因为由(1.12)，我们有

$$P(C_n - D_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$

$$P(C_n - \tilde{D}_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(C_n - D_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(C_k - D_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{当 } k \leqslant n \text{ 时}, C_n \subset C_k).$$

于是

$$P(\tilde{D}_n) \geqslant P(C_n) - P(C_n - \tilde{D}_n) \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0,$$

这样由紧集列 $\tilde{D}_n \downarrow$，就得到 $\bigcap_n C_n \supset \bigcap_n \tilde{D}_n \neq \varnothing$. 另一方面，由于 $\mathscr{C}$ 是一个半环，$\mathscr{F}$ 是它所张成的最小 σ- 代数，由半环到 σ- 代数测度扩张的唯一性，就知道本定理中的测度 P 是唯一的. ▌

由 Kolmogorov 定理立刻可知：由例 1～4 中所得到的各有限维分布族，都可以分别定义概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$. 为此只需在例 1 中取 $\Omega = \{0,1\}^T$；在例 2 中取 $\Omega = \boldsymbol{Z}^T$；例 3 中取 $\Omega = (\boldsymbol{Z}^+)^T$；而在例 4 中取 $\Omega = \boldsymbol{R}^T$（前二例中 $T = \boldsymbol{Z}^+$，后二例中 $T = \boldsymbol{R}^+$）. 再取 $\mathscr{F} = \mathscr{B}^T$ 为相应的柱集生成的 σ-代数就可按 Kolmogorov 定理得到 P，进而令

$$\xi(t, \omega) = \omega_t \quad (\omega = \{\omega_t; t \in T\}),$$

就得到了所要求的随机过程，它们的有限维分布族分别符合直观分析所得到的结果. 这样，我们就将要研究的实际问题纳入了严格的概率模型.

注：如$(\mathscr{S}, \Sigma)$为 Radon 可测空间，即它可测同构于 Polish 空间的一个普遍可测集（对开集生成的 σ-代数的任意一个概率测度的完备化 σ-代数都可测的集），则定理仍然成立[Yn_2].

2. 可分性及过程的轨道

Kolmogorov 定理虽然为我们提供了一个由有限维分布去构造随机过程的很一般的方法，但是这样的构造有一个缺陷，那就是

相对于 $\boldsymbol{R}^T$ 来说，由全体柱集生成的 σ-代数 $\mathscr{B}^T$ 太小了，以致像 $\sup\limits_{a\leqslant u\leqslant b}\xi_t$ 这样简单而与过程直接有关的量都未必 $\mathscr{B}^T$ 可测（因而就不是 $(\boldsymbol{R}^T,\mathscr{B}^T)$ 上的随机变量）. 这是因为它是由不可列个随机变量决定的，而一般地，我们只能保证可列个随机变量的 Borel 函数仍为随机变量. 这样看来，在上面所定义的随机过程框架中，在考虑与过程轨道的连续性或极限性质有关的集合时，就无法定义这类集合的概率. 摆脱这种困难最简单的办法是：对分布相同的两个随机过程不加区分，并且在这种等价类中“找”一个“好”的代表. 这种“好”的代表就是（对闭集类）可分的过程. 它的原始想法是：为了使 $\sup\limits_{a\leqslant u\leqslant b}\xi_t$ 这一类过程 $\xi.$ 的函数仍是一个随机变量，最简单的办法是要求 $\{\xi_t(\omega):t\in T\cap[a,b]\}$ 只由可列个随机变量所决定，确切地为：

定义（可分性） 随机过程 $\{\xi_t:t\in T\}$ 称为可分的，如果存在 P 零测集 N 及 T 的可列子集 S，使对于任意开区间 I 及任意闭集 F，恒有

$$\{\xi_t\in F:t\in S\cap I\}\backslash\{\xi_t\in F:t\in T\cap I\}\subset N.$$

显见，当 $\xi.$ 可分时（不妨假定 $T=\boldsymbol{R}^1$）有

$$\sup_{t\in(a,b)}\xi_t,\qquad \inf_{t\in(a,b)}\xi_t\ \text{a.e.}\ \mathscr{B}^T\ \text{可测},$$

因而它们可以看成随机变量. 类似地 $\overline{\lim\limits_{t\to t_0}}\xi_t$ 与 $\underline{\lim\limits_{t\to t_0}}\xi_t$ 也是随机变量.

可分性的限制曾广泛流行，成为随机过程论中很基本的要求，其原因在于有以下的修正定理[Do]，[Lo]，[W_2]：

定理（可分修正） 任意一个随机过程 $\{\xi_t:t\in T\}$ 必定存在一个可分的随机过程 $\{\tilde{\xi}_t:t\in T\}$，使得

$$P(\omega:\xi_t(\omega)=\tilde{\xi}_t(\omega))=1\quad(\forall\, t\in T).$$

显然 $\tilde{\xi}.$ 与 $\xi.$ 有同样的有限维分布，因而分布律相同.

自六十年代以后，人们常常希望从有限维分布直接构造具有良好的轨道性质的过程（例如连续轨道，右连续且有左极限（右连左极）的轨道，阶梯轨道，等等）. 事实上，分布律会对轨道性质有一

定的限制，但是又不能决定轨道性质(参见第五章 §2 例 1 与例 2)，所以有许多学者对于一些特殊的有限维分布，设法直接构造性质好的过程(其实质是缩小概率样本空间 $\Omega=\boldsymbol{R}^T$)。例如 Wiener 对于 Brown 分布(见第五章)就直接在全部连续函数组成的空间上构造过程，给出了著名的 Wiener 测度. 本书第六章 §3 就是对 Markov 过程直接去构造轨道连续的或轨道右连左极的过程. 本书中我们采取上述的观点，故而对可分修正定理不去证明，对可分性也不再论及.

3. 推移算子

不妨设$(\Omega,\mathscr{F})$为$(\mathscr{S}^T,\Sigma^T)$. 我们假定 T 对加法封闭. 定义 $\mathscr{S}^T\to\mathscr{S}^T$ 算子 θ^t：对$\forall\omega\in\boldsymbol{R}^T$，令 $\theta^t\omega$ 为 $\mathscr{S}^T$ 中满足下式的元素：

$$(\theta^t\omega)_s=\omega_{s+t}\quad(\text{设 }\omega=(\omega_s;s\in T)).$$

易见 θ^t是 $\Sigma^T\to\Sigma^T$ 的可测映射，且满足

$$\theta^{t_1+t_2}=\theta^{t_1}\circ\theta^{t_2}.$$

θ^t可以导出一个 $\Sigma^T\to\Sigma^T$ 的集合算子，记成 θ^{-t}，其定义为：对于 $\forall n,t_1,\cdots,t_n\in T,B\in\Sigma^n$,

$$\theta^{-t}\{(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n})\in B\}\equiv\{(\omega_{t_1+t},\cdots,\omega_{t_n+t})\in B\}.$$

最后，θ^t可以导出一个 Σ^T 可测函数上的算子. 设 f 为 Σ^T 可测，我们定义

$$\theta^t f(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n},\cdots)\equiv f(\omega_{t_1+t},\cdots,\omega_{t_n+t}).$$

又若 θ^t是保测的，即$(\theta^t)^{-1}\circ P=P$，则这个定义在不计零测集的差异下也是合理的. 我们说明如下：设

$$f(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n},\cdots)=g(\omega_{t_1'},\cdots,\omega_{t_m'},\cdots)\quad\text{a.e.}.$$

我们来证明它们用 θ^t推移后仍(a.e.)相等. 记

$$h=f(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n},\cdots)-g(\omega_{t_1'},\cdots,\omega_{t_m'},\cdots).$$

那末对于任意 $\Lambda\in\Sigma^T$ 应有

$$\int_\Lambda\theta^t h\mathrm{d}P=\int_{\theta^{-t}\Lambda}h\mathrm{d}(P\circ\theta^{-t})=0.$$

因此

$$\theta^t h = 0 \text{ a.e.},$$

即

$$\theta^t f = \theta^t g \text{ a.e.}.$$

§ 3 独立增量过程与鞅

1. 独立增量过程

在§1.1的例子中，随机徘徊、Poisson 过程、Brown 运动都有一个共同特点，那就是：在互不相交的若干个参数区间上，过程的增量相互独立. 具有这个性质的随机过程叫独立增量过程. 严格定义如下：

定义 1.1(独立增量过程) 设指标集 T 是 $\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{Z}$ 或它们与某个区间的交，$\xi=\{\xi(t,\cdot);t\in T\}$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的实值(或复值)随机过程. 我们称 ξ 为一个独立增量过程，如对任意的 $t_0<t_1<\cdots<t_n\in T$,

$$\xi(t_0,\cdot),\xi(t_1,\cdot)-\xi(t_0,\cdot),\cdots,\xi(t_n,\cdot)-\xi(t_{n-1},\cdot)$$

都相互独立. 又若还对 $t<t+h\in T$，有 $\xi(t+h,\cdot)-\xi(t,\cdot)$的分布与 t 无关，则称 ξ 是一个时齐的独立增量过程.

事实上，当 $T=\boldsymbol{Z}^+$时，一个独立增量过程就是一列相互独立随机变量的部分和(简称为独立和)；而时齐的独立增量过程就是相互独立同分布序列(简称为 i.i.d. 序列)的部分和.

数学期望有限的独立增量过程具有以下两个重要性质：

1) 设 $E(\xi(t,\cdot))=0(\forall t\in T)$，$\mathscr{F}_s=\sigma(\xi(u,\omega);u\leqslant s\in T)$. 则对$\forall s<t\in T$，等式

$$E(\xi(t,\omega)|\mathscr{F}_s)=\xi(s,\omega) \tag{M}$$

成立. 这是因为

$$\begin{aligned}E(\xi(t,\omega)|\mathscr{F}_s)&=E(\xi(t,\omega)-\xi(s,\omega)|\mathscr{F}_s)+E(\xi(s,\omega)|\mathscr{F}_s)\\&=E(\xi(t,\omega)-\xi(s,\omega))+\xi(s,\omega)=\xi(s,\omega).\end{aligned}$$

2）对$\forall s<t$，$\boldsymbol{R}$ 的 Borel 子集 B 及 Borel 可测函数 f，

$$P(\xi(t,\omega)\in B|\mathscr{F}_s)=P(\xi(t,\omega)\in B|\xi(s,\cdot)),\quad(1.13)$$

及
$$E(f(\xi(t,\omega))|\mathscr{F}_s)=E(f(\xi(t,\omega))|\xi(s,\cdot)).$$

这是因为 $P(\xi(t,\omega)\in B|\mathscr{F}_s)=E(1_B(\xi(t,\omega))|\mathscr{F}_s)$，而且

$$\begin{aligned}E(f(\xi(t,\omega))|\mathscr{F}_s)&=E(f((\xi(t,\omega)-\xi(s,\omega))+\xi(s,\omega))|\mathscr{F}_s)\\&=E(f(\xi(t,\omega)-\xi(s,\omega)+a)|\mathscr{F}_s)|_{a=\xi(s,\omega)}\\&=E(f(\xi(t,\omega)-\xi(s,\omega)+a))|_{a=\xi(s,\omega)}\\&=E(f(\xi(t,\omega))|\xi(s,\cdot)).\qquad(1.14)\end{aligned}$$

如果我们推广独立增量过程为一般可积过程，我们就称保持1)的过程为鞅；保持性质2)的过程为马氏过程(Markov 过程). 1)与2)往后分别称为鞅性与马氏性.

2. 鞅

设 $\xi=\{\xi(t,\cdot);t\in T\}$($T$ 可以是 $\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{Z}$ 或它们的子集)是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个实值(或复值)随机过程；又设$\{\mathscr{F}_t;t\in T\}$是一族非降的 $\mathscr{F}$ 的子 σ-代数，使得$\forall t\in T$，$\xi(t,\cdot)\in\mathscr{F}_t$(即$\xi(t,\cdot)$关于 $\mathscr{F}_t$ 可测)，这时称 ξ 对$\{\mathscr{F}_t\}$适应.

定义 1.2(鞅)　$\{\xi(t,\cdot),\mathscr{F}_t;t\in T\}$称为一个鞅，如果对$\forall s\leqslant t\in T$，$E|\xi(t,\cdot)|<+\infty$，而且下式成立：

$M.1)$ $E(\xi(t,\omega)|\mathscr{F}_s)=\xi(s,\omega)$.

特别，当

$$\mathscr{F}_s=\sigma(\xi(u,\cdot);u\leqslant s)\quad(\forall s\in T)\qquad(1.15)$$

时，则简称 $\xi=\{\xi(t,\cdot);t\in T\}$是一个鞅.

命题 1.2　在条件(1.15)下，$M.1)$等价于

$M.2)$ $\forall t_1<t_2<\cdots<t_n\in T$，

$$E(\xi(t_{n+1},\omega)|\xi(t_1,\cdot),\cdots,\xi(t_n,\cdot))=\xi(t_n,\omega).$$

特别地，当 $T=\boldsymbol{Z}^+$时，条件 $M.2)$又可简化为：

$M.3)$ 对一切 $n\geqslant 0$，

$$E(\xi(n+1,\omega)|\xi(0,\cdot),\cdots,\xi(n,\cdot))=\xi(n,\omega).$$

证明　显然 $M.1$)蕴含 $M.2$).现在我们来证其反面.当 $M.2$)成立时,就有

$$E(\xi(t_{n+1},\omega)1_B(\omega)) = E(\xi(t_n,\omega)1_B(\omega)) \tag{1.16}$$

对一切 $B\in\sigma(\xi(t_1,\cdot),\cdots,\xi(t_n,\cdot))$成立,这里

$$1_B(\omega) \triangleq \begin{cases} 1, & \omega \in B; \\ 0, & \omega \overline{\in} B. \end{cases}$$

为证 $M.1$),只要证明(1.16)对一切 $B\in\mathscr{F}_s$ 都成立.为此,我们采用测度论的典型方法.令

$$\mathscr{A} = \{B \in \mathscr{F}_s; B \text{ 使(1.16) 成立}\}.$$

显然 $\mathscr{A}$ 包含 $\mathscr{F}_s$ 中的任何有限维柱集,即 $\mathscr{C}\cap\mathscr{F}_s\subset\mathscr{A}$,而 $\mathscr{C}\cap\mathscr{F}_s$ 是一个 π-系;另一方面,容易验证 $\mathscr{A}$ 是一个 d-系集类,因而 $\mathscr{A}$ 包含 $\mathscr{C}\cap\mathscr{F}_s$ 的最小 d-扩张 $d(\mathscr{C}\cap\mathscr{F}_s)$,于是我们得到

$$\mathscr{F}_s \supset \mathscr{A} \supset d(\mathscr{C} \cap \mathscr{F}_s) \supset \sigma(\mathscr{C} \cap \mathscr{F}_s) = \mathscr{F}_s,$$

即 $\mathscr{F}_s=\mathscr{A}$.这样,(1.16)对 $\forall B\in\mathscr{F}_s$ 成立,也就是 $M.1$)成立.

当 $T=\mathbf{Z}^+$,由 $M.3$)我们可以得到

$$\begin{aligned}
&E(\xi(n+m,\omega)|\mathscr{F}_m) \\
&\quad = E(E(\xi(n+m,\omega)|\xi(0,\cdot),\cdots,\xi(m+n-1,\cdot))|\mathscr{F}_m) \\
&\quad = E(\xi(n+m-1,\omega)|\mathscr{F}_m) \\
&\quad = E(\xi(n+m-2,\omega)|\mathscr{F}_m) = \cdots \\
&\quad = E(\xi(m+n-n,\omega)|\mathscr{F}_m) = \xi(m,\omega),
\end{aligned}$$

即 $M.1$)成立. ▌

容易看出,所有均值函数恒等于常数的实值独立增量过程都是鞅,但反之不然,这是因为

$$E(\xi(t+s,\omega)|\mathscr{F}_s) = E(\xi(t+s,\omega) - \xi(s,\omega)|\mathscr{F}_s) + \xi(s,\omega),$$

当$\{\xi(t,\cdot)\}$是均值定常的独立增量过程时,上式右端第一项为 0;但当第一项为 0 时,却不一定有 $\xi(t+s,\omega)-\xi(s,\omega)$与 $\mathscr{F}_s$ 独立.

鞅是一种十分基本而又重要的随机过程,它有许多十分好的性质,在现代概率论中,它已成为各领域共同的常用基本工具.第二章将专门讨论这种过程.

3. 独立增量过程的性质简述，稳定过程

独立增量过程并不一定都是鞅(参见第五章§2例1中的Cauchy过程)，对这些过程，下一章鞅论的结果就不适用了. 但是，独立增量性是很强的，它相当于"连续情形的独立和"，由它可以得到一系列深入的性质. 这方面的研究到六十年代已成熟. 由于这些研究在方法上的特殊性，再加上篇幅又长，所以在本书中我们不单列章节详细讨论，而以附录的形式(附录Ⅰ)列出最基本的结果和重要特例.

在独立增量过程中有一类很重要的特例——稳定过程，它满足条件：存在$\alpha>0$(α称为此稳定过程的阶)，使对$\forall c>0$恒有

$$\xi_{ct}\overset{d}{=}c^{\frac{1}{\alpha}}\xi_t\quad(\text{“}\overset{d}{=}\text{”指同分布}).$$

对于§1中例4的Brown运动$\{B_t;t\in\boldsymbol{R}^1\}$，显见有$B_{ct},c^{\frac{1}{2}}B_t\sim N(0,ct)$，即$B_{ct}\overset{d}{=}c^{\frac{1}{2}}B_t$，可见Brown运动是2阶稳定过程. 第五章§2例1中的Cauchy过程是1阶稳定过程. 关于稳定过程的一些事实参见附录.

§4 Markov过程(马氏过程)

正如前面几个例子所展示的那样，有一类过程具有无后效性，也就是在已知过程的现在的取值的条件下，它将来的统计规律与它的过去无关，这也叫做马氏性.

设T是一个有序集.

定义1.3(Markov过程) 设有概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的以$(\mathscr{S},\Sigma)$为状态空间的随机过程$\xi=\{\xi(t,\cdot);t\in T\}$，及$\mathscr{F}$的一族子$\sigma$-代数$\{\mathscr{F}_t;t\in T\}$使对$\forall s<t$，$\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t$. 设$\xi$对$\{\mathscr{F}_t;t\in T\}$是适应的，这时，我们称$(\Omega,\mathscr{F},P,\xi,\{\mathscr{F}_t\})$是一个以$\{\mathscr{F}_t\}$为参考$\sigma$-代数族的马氏过程，如果对$\forall s<t\in T$，$B\in\Sigma$，都有下式成立：

$MK.1)$ $P(\omega;\xi(t,\omega)\in B|\mathscr{F}_s)=P(\omega;\xi(t,\omega)\in B|\xi(s,\cdot))$.
$MK.1)$又称为马氏性.

特别,当 $\mathscr{F}_t=\sigma(\xi(u,\cdot);u\leqslant t)(\forall t\in T)$时,则称 ξ 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的马氏过程.

命题 1.3 ξ 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个马氏过程,当且仅当对$\forall n\geqslant 1$ 及 $t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}\in T$,都有下式成立:

$MK.2)$ $P(\xi(t_{n+1},\omega)\in B|\xi(t_1,\cdot),\cdots,\xi(t_n,\cdot))$

$$=P(\xi(t_{n+1},\omega)\in B|\xi(t_n,\cdot)).$$

证明 在 $\mathscr{F}_t=\sigma(\xi(u,\cdot);u\leqslant t)$时,$MK.1)$显然蕴含$MK.2)$;另一方面,用测度论典型方法,仿命题 1.2,不难证明$MK.2)$也蕴含 $MK.1)$(留作习题,请读者自证). ▮

命题 1.4 下列诸条件等价:

1) ξ 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个马氏过程;

2) 对一切 $s<t\in T$ 及有界实函数 $f\in(\mathscr{S},\Sigma)$,下式成立:

$MK.3)$ $E(f(\xi(t,\omega))|\mathscr{F}_s)=E(f(\xi(t,\omega)|\xi(s,\cdot))$;

3) 令 $\mathscr{F}^s=\sigma(\xi(u,\cdot);u\geqslant s)$(将来的 σ-代数),对任意有界实函数 $g(\omega)\in\mathscr{F}^s$,下式成立:

$MK.4)$ $E(g(\omega)|\mathscr{F}_s)=E(g(\omega)|\xi(s,\cdot))$;

4) 对任意有界实函数 $f\in\mathscr{F}_s$ 与 $g\in\mathscr{F}^s(\forall s\in T)$,下式总成立:

$MK.5)$ $E(f(\omega)g(\omega)|\xi(s,\cdot))$

$$=E(f(\omega)|\xi(s,\cdot))E(g(\omega)|\xi(s,\cdot)).$$

证明 用测度论的典型方法可以证明 1),2),3)等价.我们这里只以 2)蕴含 3)的证明为例,说明测度论典型方法在此处的用法.其它类似的证明作为习题请读者自己去证明.

当 2)成立,对可测实函数 $f_1,f_2\in(\mathscr{S},\Sigma)$及 $t_2>t_1\geqslant s$,有

$$E(f_1(\xi_{t_1})f_2(\xi_{t_2})|\mathscr{F}_s)=E(f_1(\xi_{t_1})E(f_2(\xi_{t_2})|\mathscr{F}_{t_1})|\mathscr{F}_s)$$

$$=E(f_1(\xi_{t_1})E(f_2(\xi_{t_2})|\xi_{t_1})|\mathscr{F}_s)$$

$$= E(f_1(\xi_{t_1})E(f_2(\xi_{t_2})|\xi_{t_1})|\xi_s)$$
$$= E(f_1(\xi_{t_1})E(f_2(\xi_{t_2})|\mathscr{F}_{t_1})|\xi_s)$$
$$= E(E(f_1(\xi_{t_1})f_2(\xi_{t_2})|\mathscr{F}_{t_1})|\xi_s)$$
$$= E(f_1(\xi_{t_1})f_2(\xi_{t_2}))|\xi_s).$$

由归纳法就得到对任意的 $f_1,\cdots,f_n\in\Sigma$ 及 $t_n>t_{n-1}>\cdots>t_1\geqslant s$,

$$E(f_1(\xi_{t_1})f_2(\xi_{t_2})\cdots f_n(\xi_{t_n})|\mathscr{F}_s)$$
$$= E(f_1(\xi_{t_1})f_2(\xi_{t_2})\cdots f_n(\xi_{t_n})|\xi_s).$$

特别地,对 $A_1,\cdots,A_n\in\Sigma$,有

$$E(1_{A_1}(\xi_{t_1})\cdots 1_{A_n}(\xi_{t_n})|\mathscr{F}_s) = E(1_{A_1}(\xi_{t_1})\cdots 1_{A_n}(\xi_{t_n})|\xi_s).$$

令

$$\mathscr{G}\triangleq\{B=\{\omega;\xi_{t_1}(\omega)\in A_1,\cdots,\xi_{t_n}(\omega)\in A_n\};$$
$$t_n>t_{n-1}>\cdots>t_1\geqslant s;A_1,\cdots,A_n\in\Sigma,n\geqslant 1\},$$
$$\mathscr{H}\triangleq\{g(\omega)\in\mathscr{F}_s;g\text{ 满足 }MK.4)\}.$$

显然 $\mathscr{H}$ 包含 $\mathscr{G}$ 中集合的特征函数,$\mathscr{G}$ 是一个 π 系,于是由测度论典型方法(定理 0.2),$\mathscr{H}$ 包含一切 $\sigma(\mathscr{G})(=\mathscr{F})_s$ 可测函数,即 $MK.4)$成立.

此外,由 3)可以证明 4)成立如下:

$$E(f(\omega)g(\omega)|\xi(s,\cdot)) = E(E(f(\omega)g(\omega)|\mathscr{F}_s)|\xi(s,\cdot))$$
$$= E(f(\omega)E(g(\omega)|\mathscr{F}_s)|\xi(s,\cdot))$$
$$= E(f(\omega)E(g(\omega)|\xi(s,\cdot))|\xi(s,\cdot))$$
$$= E(g(\omega)|\xi(s,\cdot))E(f(\omega)|\xi(s,\cdot)).$$

又若将 $MK.5)$式两端求数学期望就得到

$$E(f(\omega)g(\omega)) = E(E(f(\omega)|\xi(s,\cdot))E(g(\omega)|\xi(s,\cdot)))$$
$$= E(E(f(\omega)E(g(\omega)|\xi(s,\cdot))|\xi(s,\cdot)))$$
$$= E(f(\omega)E(g(\omega)|\xi(s,\cdot))),$$

而这正是等式 $MK.4)$的条件期望的等价定义. ▌

由上面的讨论,我们可以看出,对马氏过程来说,条件期望族

$\{E(1_{\{\xi(t,\omega)\in A\}}(\omega)|\xi(s,\cdot)=x\}$和初分布$\{P(\omega;\xi(0,\omega)\in A)\}$就决定了$\xi$的分布. 下面的命题也说明了这点. 但是,一般来说,对固定的$A\in\Sigma$,条件概率$p(s,x;t,A)$只能由P(或联合分布)对x几乎处处确定,也就是有一个$p_s(\mathrm{d}x)\triangleq P(\xi_s\in\mathrm{d}x)$的零测度的例外集,对其上的$x$,$p(s,x;t,A)$可以根本无定义或不确定,而此例外集可因$A$不同而异;为此我们加上正则条件,即设

$$\{E(1_{\{\xi(t,\omega)\in A\}}(\omega)|\xi(s,\cdot)=x)\}$$

有一个好的版本,称为(正则)条件分布,记为

$$p(s,x;t,A)\triangleq E(1_{\{\xi(t,\omega)\in A\}}(\omega)|\xi(s,\cdot)=x),$$

它对A是测度,对(s,x,t)可测. 再记

$$p_0(A)\triangleq P(\omega;\xi(0,\omega)\in A).$$

那末我们有

命题 1.5 对$\forall t_1<t_2<\cdots<t_n\in T$与$B\in\Sigma^n$,

$$\begin{aligned}P(\omega;(\xi(t_1,\omega),\xi(t_2,\omega),\cdots,\xi,(t_n,\omega)\in B)\\=\int p_0(\mathrm{d}x_0)\int p(0,x_0;t_1,\mathrm{d}x_1)\int\cdots\\\times\int p(t_{n-1},x_{n-1};t_n,\mathrm{d}x_n)1_B(x_1,x_2,\cdots,x_n).\end{aligned}\quad(1.17)$$

证明 先设$B=B_1\times B_2\times\cdots\times B_n$,这时

$$\begin{aligned}&P(\omega;(\xi(t_1,\omega),\xi(t_2,\omega),\cdots,\xi(t_n,\omega))\in B)\\&\quad=E(\xi(t_1,\omega)\in B_1,\xi(t_2,\omega)\in B_2,\cdots,\xi(t_n,\omega)\in B_n)\\&\quad=E(\xi(t_1,\omega)\in B_1,E(\xi(t_2,\omega)\in B_2,\cdots,\\&\qquad\xi(t_n,\omega)\in B_n|\mathscr{F}_{t_1}))\\&\quad=\cdots=E(\xi(t_1,\omega)\in B_1,E(\xi(t_2,\omega)\in B_2,\cdots,\\&\qquad E(\xi(t_n,\omega)\in B_n|\xi_{t_{n-1}})\cdots|\xi_{t_1}))\\&\quad=\int p_0(\mathrm{d}x_0)\int_{B_1}p(0,x_0;t_1,\mathrm{d}x_1)\int_{B_2}\cdots\int_{B_n}p(t_{n-1},x_{n-1};t_n,\mathrm{d}x_n)\\&\quad=\int p_0(\mathrm{d}x_0)\int p(0,x_0;t_1,\mathrm{d}x_1)\cdots\end{aligned}$$

$$\times \int p(t_{n-1},x_{n-1};t_n,\mathrm{d}x_n)1_B(x_1,\cdots,x_n).$$

再利用测度论典型方法,就可以证明(1.17)对$\forall B\in\Sigma^n$成立. ▌

当$\mathscr{S}$是一个完备可分可测度量空间(更一般地,满足定理1.1后面注中条件的空间)时,我们可以找到(参见附录)一个对所有$A\in\Sigma$的公共例外集,使得除去此例外集后,$p(s,x;t,A)$对一切$A\in\Sigma$都完全确定,而且满足

$TP.1)$ 对固定的$x,s,t\{p(s,x;t,A)\}$是$(\mathscr{S},\Sigma)$上的一个概率测度;

$TP.2)$ 对固定的$A,s,t,p(s,\cdot;t,A)$为$(\mathscr{S},\Sigma)$可测函数;

$TP.3)$ 对$\forall s\leqslant r\leqslant t$,下述 **Kolmogorov-Chapman 方程**成立:

$$p(s,x;t,A)=\int p(s,x;r,\mathrm{d}y)p(r,y;t,A).$$

定义1.4(转移概率族) 满足$TP.1)\sim TP.3)$的函数族

$$\{p(s,x;t,A)\mid\forall\ s\leqslant t\in T,A\in\Sigma,x\in\mathscr{S}\}$$

称为一个转移概率族,也称转移函数族.

一个自然的问题是,给定一个转移概率族,是否可以构造一个马氏过程$(\Omega,\mathscr{F},P,(\xi_t,\mathscr{F}_t;t\in T))$,使得$\xi$以给定的$\{p(s,x;t,A)\}$为转移概率族?下面命题1.6将对$\mathscr{S}$是完备可分度量空间的情形,解决这个问题.

命题1.6 设$(\mathscr{S},\Sigma)$是一个完备可分度量空间生成的可测空间;$\{p(s,x;t,A);s<t\in T,x\in\mathscr{S},A\in\Sigma\}$是一个转移概率族,则可以构造一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及其上一个马氏过程$\xi=\{\xi(t,\cdot);t\in T\}$使得

$$P(\omega;\xi(t,\omega)\in A\mid\xi(s,\omega)=x)=p(s,x;t,A).$$

证明 我们用Kolmogorov定理来构造概率空间.为此,令$\Omega=\mathscr{S}^T$,$\mathscr{C}$为Ω的全体有限维可测柱集类,$\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{C})$.类似于(1.17)式,任取$(\mathscr{S},\Sigma)$上的概率测度$p_0(\mathrm{d}x)$,对$\forall\ t_1<t_2<\cdots<t_n\in T$,及$\forall\tilde{A}\in\Sigma^n$,令

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(\widetilde{A})=\int p_0(\mathrm{d}x_0)\int p(0,x_0;t_1,\mathrm{d}x_1)\cdots$$
$$\times\int p(t_{n-1},x_{n-1};t_n,\mathrm{d}x_n)1_{\widetilde{A}}(x_1,\cdots,x_n),$$

由于条件 $TP.3)$成立，我们可以看出，对 $\widetilde{B}\in\Sigma^{n-1}$，

$$\int p_0(\mathrm{d}x_0)\int p(0,x_0;t_1,\mathrm{d}x_1)\int\cdots$$
$$\times\int p(t_{n-1},x_{n-1};t_n,\mathrm{d}x_n)1_{\widetilde{B}}(x_1,\cdots,x_k,x_{k+2},\cdots,x_n)$$
$$=\int p_0(\mathrm{d}x_0)\int\cdots\int p(t_k,x_k;t_{k+2},\mathrm{d}x_{k+2})\int\cdots$$
$$\times\int p(t_{n-1},x_{n-1};t_n,\mathrm{d}x_n)1_{\widetilde{B}}(x_1,\cdots,x_k,x_{k+2}\cdots,x_n).$$

因而若令 $\widetilde{A}=\{(x_1,\cdots,x_n);(x_1,\cdots,x_k,x_{k+2},\cdots,x_n)\in\widetilde{B}\}$，则

$$F_{t_1,\cdots,t_k,t_{k+1},\cdots,t_n}(\widetilde{A})=F_{t_1,\cdots,t_k,t_{k+2},\cdots,t_n}(\widetilde{B}).$$

类似地，我们容易得到相容性条件 $K.1)$满足. 再按照相容性条件 $K.2)$的要求去定义任意次序的$(t_1,\cdots,t_n)$的测度 $F_{t_1,\cdots,t_n}(\cdot)$，于是按 Kolmogorov 相容性定理（定理 1.1），就可得到$(\Omega,\mathscr{F})$上的测度 P. 再令 $\xi(t,\omega)=\omega_t$，就有

$$P(\omega;(\xi(t_1,\omega),\cdots,\xi(t_n,\omega))\in\widetilde{B})=F_{t_1,\cdots,t_n}(\widetilde{B})$$

对$\forall t_1,\cdots,t_n\in T$ 及 $B\in\Sigma^n$ 成立. 下面我们来证明 $\xi=\{\xi(t,\cdot),t\in T\}$具有马氏性，为此只要证明命题 1.3 中 $MK.2)$成立. 事实上，对$\forall B_n\in\Sigma^n,A\in\Sigma$，我们有

$$P(\omega;\xi(t_{n+1},\omega)\in A,(\xi(t_1,\omega),\cdots,\xi(t_n,\omega))\in B_n)$$
$$=\int p_0(\mathrm{d}x_0)\int p(0,x_0;x_1,\mathrm{d}x_1)\int\cdots\int p(t_n,x_n;t_{n+1},\mathrm{d}x_{n+1})$$
$$\times 1_A(x_{n+1})1_{B_n}(x_1,\cdots,x_n)$$
$$=\int p_0(\mathrm{d}x_0)\int p(0,x_0;x_1,\mathrm{d}x_1)\int\cdots\int p(t_{n-1},x_{n-1};t_n,\mathrm{d}x_n)$$
$$\times 1_{B_n}(x_1,\cdots,x_n)p(t_n,x_n;t_{n+1},A)$$
$$=E(1_{B_n}(\xi(t_1,\omega),\cdots,\xi(t_n,\omega))p(t_n,\xi(t_n,\omega);t_{n+1},A)),$$

由条件期望的定义,这就是

$$P(\omega;\xi(t_{n+1},\omega) \in A|\xi(t_1,\cdot),\cdots,\xi(t_n,\cdot)) \\ = p(t_n,\xi(t_n,\omega);t_{n+1},A). \tag{1.18}$$

由于 $\sigma(\xi(t_n,\cdot))\subset\sigma(\xi(t_1,\cdot),\xi(t_2,\cdot),\cdots,\xi(t_n,\cdot))$,对上式求关于 $\sigma(\xi(t_n,\cdot))$的条件期望,就得到

$$P(\omega;\xi(t_{n+1},\omega)\in A|\xi(t_n,\cdot))=p(t_n,\xi(t_n,\omega);t_{n+1},A). \tag{1.19}$$

比较(1.18)和(1.19)就得到 ξ 的马氏性,以及它的转移概率满足定理要求. ▌

当 $\mathscr{S}$ 上无拓扑结构时,$(\mathscr{S},\Sigma)$只是一个可测空间,是否仍然可设法由转移概率族$\{p(s,x;t,A)\}$定义马氏过程呢?下面的 Tulcea 定理回答了这一问题.为了使 Tulcea 定理的实质更清楚,我们给出推广的 Tulcea 定理,当然后者还可以有更广泛的应用.

在证明 Kolmogrov 相容性定理时,定义 $\mathscr{C}$ 上的有限可加非负集合函数并不涉及 $\mathscr{S}$ 的拓扑性质.可见要害是 $\mathscr{C}$ 上的这个非负集合函数的完全可加性.为此,只需对集合列$\{C_n\}$($C_n\downarrow$,但 $P(C_n)\geqslant\varepsilon(\forall n\geqslant1)$),去找出$\{C_n\}$中的一个公共点.当 $\mathscr{S}$ 中有拓扑时,我们利用非空紧集设法去"套出"这个公共点.现在,我们的 $\mathscr{S}$ 中没有拓扑,但如果我们能找出一列

$$\tilde{\omega}^n = (\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\cdots,\bar{\omega}_n,\omega^n_{n+1},\omega^n_{n+2},\cdots) \in C_n,$$

那么抽对角线子列就得到

$$\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1,\cdots,\bar{\omega}_n,\bar{\omega}_{n+1},\cdots) \in C_n \quad (\forall\, n \geqslant 1).$$

这是因为对 C_n 中的任一点 $\omega^n=(\omega^n_1,\omega^n_2,\cdots,\omega^n_m,\cdots)$,令

$$A_n(\omega^n) \triangleq \{\omega = (\omega_1,\cdots,\omega_m,\cdots);\omega_i = \omega^n_i, 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

必有 $A_n(\omega^n)\subset C_n$(因为 C_n 是柱集).于是 $\bar{\omega}\in A_n(\tilde{\omega}^n)\subset C_n$.

事实上,马氏性在构造过程中并不重要,只要给定条件分布族$\{Q(n,\omega;A)\}$,即可构造概率空间及其上的坐标过程.这里

$$Q(n,\omega;A) = E(1_A(\omega)|\mathscr{F}_{n-1}), \tag{1.20}$$

$A\in\mathscr{F}_n$,而 $\mathscr{F}_n$=前 n 个坐标的柱集生成的 σ-代数.

我们还可以考虑更一般的情况,即 Ω 不一定是乘积空间,$\mathscr{F}_n$

也不一定是前 n 个坐标的柱集类. 一般地考虑一个可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 及如(1.20)那样的一族条件概率. 这样,不仅能使我们得到一个更一般的定理,可以应用于更广的范围,而且更突出了定理条件的实质. 显然,我们仍需要 $\{Q(n,\omega;A)\}$ 具有一定的相容性,才能保证条件测度彼此不矛盾. 由于对 $A\in\mathscr{F}_{n-1}$,我们应有

$$E(1_A|\mathscr{F}_{n-1})=1_A(\omega), \tag{1.21}$$

显然就有:

T.1) $\forall\omega\in A\in\mathscr{F}_{n-1},Q(n,\omega,A)=1$.

事实上,T.1)也蕴含了(1.21)(对 A 的余集用 T.1 即可),它就是 $\{Q(n,\omega,A)\}$ 应满足的相容性条件. 此外,代替"非空单调紧集列的交非空"这一性质是我们在下面给出的"**紧相交性**"成立这一要求. 令

$$A_n(\omega)=\bigcap_{\substack{A\in\mathscr{F}_n\\ \omega\in A}}A.$$

T.2) "紧相交性"成立,即对任一列 $\omega^{(n)}\in\Omega(n\geqslant 1)$,"$\forall N\geqslant 1$, $\bigcap\limits_{n=1}^{N}A_n(\omega^{(n)})\neq\varnothing$ 成立"蕴含"$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n(\omega^{(n)})\neq\varnothing$".

事实上,T.2)就是上面讲过的由乘积空间上的点列 $\omega^{(n)}$ 可以得到 $\bar{\omega}$ 这一事实的推广.

定理 1.7(Tulcea 定理) 设在可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 中有子 σ-代数族 $\mathscr{F}_n\uparrow\mathscr{F}\ (n\geqslant 0)$,及测度与条件测度族 $\{Q(0,\cdot)\}$, $\{Q(n,\omega;\cdot),n\geqslant 1\}$,其中 $Q(0,\cdot)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F}_0)$ 上的测度; $Q(n,\omega;\cdot)$ 对固定的 ω 是 $(\Omega,\mathscr{F}_n)$ 上的概率测度,而对固定的 $A\in\mathscr{F}_n$, $Q(n,\cdot;A)$ 是 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测函数. 则当条件 T.1)和 T.2)成立时,存在唯一的 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率测度 P,使得以下各性质成立:

1) $P|_{\mathscr{F}_0}=Q(0,\cdot)$(即对 $\forall A\in\mathscr{F}_0,P(A)=Q(0,A)$);

2) 对 $\forall A\in\mathscr{F}_n$,

$$E(1_A(\omega)|\mathscr{F}_{n-1})=Q(n,\omega;A).$$

事实上,条件 2) 等价于

2') $\int_{A\cap B} \mathrm{d}P = \int_B Q(n,\omega;A)P(\mathrm{d}\omega) \quad (\forall\ A\in\mathscr{F}_n, B\in\mathscr{F}_{n-1})$.

2')还蕴含

$$P(A) = \int Q(n,\omega;A)P(\mathrm{d}\omega) \quad (\forall\ A \in \mathscr{F}_n).$$

证明 1) 令

$$P(A) = Q(0,A), \quad \forall\ A \in \mathscr{F}_0.$$

归纳地,对 $A\in\mathscr{F}_n$,由于 $Q(n,\cdot\ ;A)\in\mathscr{F}_{n-1}$,可以定义

$$P(A) = \int Q(n,\omega;A)P(\mathrm{d}\omega). \tag{1.22}$$

由 $T.1)$,对$\forall A\in\mathscr{F}_{n-1}\subset\mathscr{F}_n$,在(1.22)中对 $P(A)$按 $\mathscr{F}_{n-1}$与 $\mathscr{F}_n$ 中的集合所给出的定义是一致的,因

$$\begin{aligned}\int Q(n,\omega;A)P(\mathrm{d}\omega) &= \int_A P(\mathrm{d}\omega) + \int_{A^c} Q(n,\omega;A)P(\mathrm{d}\omega)\\ &= \int Q(n-1,\omega;A)P(\mathrm{d}\omega)\\ &\quad + \int 1_{A^c}(\omega)(1-Q(n,\omega;A^c))P(\mathrm{d}\omega)\\ &= \int Q(n-1,\omega;A)P(\mathrm{d}\omega).\end{aligned}$$

这样在 $\mathscr{C}=\{C;\exists n\geqslant 0, C\in\mathscr{F}_n\}$上,我们完好地定义了一个有限可加的非负集合函数.

2) 证明 $P(\cdot)$在 $\mathscr{C}$ 上也是完全可加的.

设有 $C_n\in\mathscr{C}, C_n\downarrow, P(C_n)\geqslant\varepsilon>0(\forall n\geqslant 1)$,我们要证明 $\bigcap\limits_n C_n \neq \varnothing$.不失一般性,不妨设 $C_n\in\mathscr{F}_n$,这也就是要找 $\omega^{(n)}\in C_n$,使 $\bigcap\limits_{n=1}^N A_n(\omega^{(n)}) \neq \varnothing(\forall\ N\geqslant 1)$,以便由紧相交性 $T.2)$得到 $\overline{\omega}\in C_n$.

1° 为书写方便,我们先定义以下 m-步转移概率测度.置:

$$Q(-1,n;\omega,A) \triangleq P(A),$$
$$Q(n,n+1;\omega,A) \triangleq Q(n+1,\omega;A)$$

及

$$Q(n,n+m;\omega,A)$$
$$\triangleq\int Q(n,n+m-1;\omega,\mathrm{d}\omega_1)Q(n+m,\omega_1;A).$$

显然,对于 $A\in\mathscr{F}_{n+m}$固定,$Q(n,n+m;\omega,A)\in\mathscr{F}_n$.

再令

$$F_n^k\triangleq\left\{\omega;Q(k,n;\omega,C_n)\geqslant\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right\}\in\mathscr{F}_k\subset\mathscr{F}_{n-1},\quad(1.23)$$
$$k=1,2,\cdots;\ n=k+1,k+2,\cdots.$$

由

$$\begin{aligned}Q(k,n+1;\omega,C_{n+1})&=\int Q(k,n;\omega,\mathrm{d}\omega_1)Q(n+1,\omega_1;C_{n+1})\\&\leqslant\int Q(k,n;\omega,\mathrm{d}\omega_1)Q(n+1,\omega_1;C_n)\\&=Q(k,n;\omega,C_n)\end{aligned}$$

立刻知道 $F_n^k\supset F_{n+1}^k(\forall n>k)$.

2° 现在让我们用归纳法来证明,存在 $\omega^{(k)}\in\left(\bigcap_{n>k}F_n^k\right)\cap A_{k-1}(\omega^{(k-1)})(k=1,2,\cdots)$ 与 $\omega^{(0)}\in\bigcap_{n>0}F_n^0$. 由于

$$\begin{aligned}Q(k,n;\omega,C_n)&=\int Q(k+1,n;\omega_1,C_n)Q(k,k+1;\omega,\mathrm{d}\omega_1)\\&\leqslant Q(k,k+1;\omega,F_n^{k+1})\\&\quad+\int_{(F_n^{k+1})^c}\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}Q(k,k+1;\omega,\mathrm{d}\omega_1)\\&\leqslant Q(k,k+1;\omega,F_n^{k+1})+\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.\end{aligned}\quad(1.24)$$

当 $k=-1$,上式即

$$\begin{aligned}\varepsilon\leqslant P(C_n)&=Q(-1,n;\omega,C_n)\\&\leqslant Q(-1,0;\omega,F_n^0)+\frac{\varepsilon}{2}=P(F_n^0)+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

可见

$$P\left(\bigcap_{n\geqslant0}F_n^0\right)=\lim_{n\to\infty}P(F_n^0)\geqslant\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}>0.$$

于是，存在 $\omega^{(0)} \in \bigcap_{n\geqslant 0} F_n^0$，而且这时

$$Q(0,n;\omega^{(0)},C_n) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall\, n \geqslant 0).$$

设存在 $\omega^{(k)} \in A_{k-1}(\omega^{(k-1)}) \cap \left(\bigcap_{n>k} F_n^k\right)$，于是由(1.23)与(1.24)就立刻得到(对 $\omega^{(k)} \in F_n^k$)

$$Q(k,k+1;\omega^{(k)},F_n^{k+1}) \geqslant Q(k,n,\omega^{(k)},C_n) - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

这样，我们就有：

$$Q\left(k,k+1;\omega^{(k)}, \bigcap F_n^{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} Q(k,k+1;\omega^{(k)},F_n^{k+1}) \geqslant \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} > 0.$$

又因为 $\omega^{(k)} \in A_k(\omega^{(k)})$，所以对 $\forall A \in \mathscr{F}_k, A \supset A_k(\omega^{(k)})$，有

$$Q(k,k+1;\omega^{(k)},A) = 1 \Longrightarrow Q^*(k,k+1;\omega^{(k)},A_k(\omega^{(k)})) = 1,$$

其中 Q^* 指 Q 的外测度，于是有

$$Q^*\left(k,k+1;\omega^{(k)},\left(\bigcap_{n>k+1} F_n^{k+1}\right) \cap A_k(\omega^{(k)})\right) > 0.$$

所以，一定存在 $\omega^{(k+1)} \in \left(\bigcap_{n>k+1} F_n^{k+1}\right) \cap A_k(\omega^{(k)})$.

3° 由 2°的结果，可见

$$\omega^{(k)} \in A_{k-1}(\omega^{(k-1)}).$$

另一方面，由 $A_{k-1}(\omega^{(k-1)}) \in \mathscr{F}_{k-1} \subset \mathscr{F}_k$，又可得到

$$A_k(\omega^{(k)}) \subset A_{k-1}(\omega^{(k)}) \subset A_{k-1}(\omega^{(k-1)}).$$

于是 $\bigcap_{0\leqslant n\leqslant k} A_n(\omega^{(n)})$ 非空($k \geqslant 0$)，由紧相交性，就存在某个 $\bar{\omega} \in \bigcap_{k\geqslant 0} A_k(\omega^{(k)})$. 再注意到

$$1_{C_k}(\omega^{(k)}) = Q(k,k+1;\omega^{(k)},C_k)$$

$$\geqslant Q(k,k+1;\omega^{(k)},C_{k+1}) > \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} > 0,$$

我们就知道 $\omega^{(k)}\in C_k$，从而由 $C_k\in\mathscr{F}_k$ 得到

$$\bar{\omega}\in A_k(\omega^{(k)})\subset C_k\quad(\forall\, k\geqslant 0).$$

至此，定理得证. ▌

§5 Gauss 系

定义 1.5(Gauss 系) 概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机过程 $\xi=\{\xi(t,\cdot);t\in T\}$ 称为一个 Gauss 系，如果对$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，$(\xi(t_1,\cdot),\cdots,\xi(t_n,\cdot))$的联合分布都是Gauss 分布，即正态分布及其退化情形，亦即

$$Ee^{\mathrm{i}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\xi(t_k,\cdot)}=e^{\mathrm{i}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k E\xi(t_k,\cdot)-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j}\lambda_i\mathrm{Cov}(\xi(t_i,\cdot),\xi(t_j,\cdot))\lambda_j}.$$

命题 1.8 $\xi=\{\xi_t;t\in T\}$是 Gauss 系当且仅当其中任何有限个随机变量的线性组合都是一元 Gauss 分布，即对$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T(n\geqslant 1)$，$\alpha_k$ 为实数$(1\leqslant k\leqslant n)$，随机变量 $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_{t_k}$ 服从一元 Gauss 分布.

证明 设$\{\xi_t;t\in T\}$是 Gauss 系，那么对任意其中的 n 个随机变量 $\xi_{t_1},\xi_{t_2},\cdots,\xi_{t_n}$，它们的联合特征函数是

$$E\left(e^{\mathrm{i}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_{t_k}}\right)=e^{\mathrm{i}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\mu_k-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j}\lambda_i\sigma_{ij}\lambda_j},$$

其中 $\mu_k=E\xi_{t_k}$，$\sigma_{ij}=E(\xi_{t_i}-\mu_i)(\xi_{t_j}-\mu_j)$. 特别取 $\lambda_k=\lambda\alpha_k$，线性组合 $Y\triangleq\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_{t_k}$ 就有特征函数

$$E(e^{\mathrm{i}\lambda Y})=E\left(e^{\mathrm{i}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda\alpha_k\xi_{t_k}}\right)=e^{\mathrm{i}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda\alpha_k\mu_k-\frac{1}{2}\lambda^2\sum\limits_{i,j}\alpha_i\sigma_{ij}\alpha_j}=e^{\mathrm{i}\lambda EY-\frac{1}{2}\lambda^2E(Y-EY)^2}.$$

可见 Y 是一元正态分布.

反之，设 $\xi=\{\xi_t;t\in T\}$的任何线性组合都是一元 Gauss 分布，那么对 ξ 中的有限个 $\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n}$的特征函数在 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的值，可以

看成是线性组合 $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_{l_k}$ 的特征函数在 $\lambda=1$ 的值

$$E\left(e^{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_{l_k}}\right)=e^{iE\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_{l_k}\right)-\frac{1}{2}E\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(\xi_{l_k}-E\xi_{l_k})\right)^2}$$

$$=e^{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k E\xi_{l_k}-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j E(\xi_{l_i}-E\xi_{l_i})(\xi_{l_j}-E\xi_{l_j})},$$

即 $(\xi_{l_1},\cdots,\xi_{l_n})$ 是联合 Gauss 分布. ▌

命题 1.9 任给一个 n 元实向量 $(\mu_1,\cdots,\mu_n)$ 与一个 $n\times n$ 非负定矩阵 (σ_{ij})，则一定存在 n 个 Gauss 随机变量 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，使 $E\xi_i=\mu_i$，$E(\xi_i-\mu_i)(\xi_j-\mu_j)=\sigma_{ij}$；而且在分布相同意义下 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 唯一. 即若有 $(\xi_1',\cdots,\xi_n')$ 具有上述性质，则 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 与 $(\xi_1',\cdots,\xi_n')$ 同分布.

证明 令

$$f(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=e^{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\mu_k-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\lambda_i\sigma_{ij}\lambda_j}.$$

由 f 可唯一地决定 $(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}_n)$ 上的概率测度 $F(\cdot)$，使

$$f(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\int\cdots\int e^{i(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)}F(\mathrm{d}x).$$

令

$$\Omega=\mathbf{R}^n,\mathscr{F}=\mathscr{B}_n,\ \xi_k(\omega)=\omega_k\quad(\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)),$$

则 $\xi_k(\omega)$（$(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}_n)$ 上的坐标随机变量）是可测函数. 取

$$P(A)=\int\cdots\int 1_A(x)F(\mathrm{d}x)\quad(\forall A\in\mathscr{F}),$$

于是

$$P(\omega;\xi_k(\omega)\leqslant x_k,\ k=1,2,\cdots,n)$$
$$=F(\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n);\omega_k\leqslant x_k,k=1,2,\cdots,n).$$

这就可得到

$$E^P\left(e^{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_k(\omega)}\right)=\int\cdots\int e^{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k}F(\mathrm{d}x)=f(\lambda_1,\cdots,\lambda_n).$$

于是

$$\mathrm{i}E\xi_k = \frac{\partial f}{\partial \lambda_k}(0,\cdots,0) = \mathrm{i}\mu_k \quad (k = 1,2,\cdots,n),$$

$$E(\xi_k - \mu_k)(\xi_j - \mu_j) = -\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_k \partial \lambda_j}(0,\cdots,0) = \sigma_{kj},$$

$$k,j = 1,2,\cdots,n.$$

可见$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$满足命题要求. 此外由于 f 由$\{\mu_i,\sigma_{ij}\}$唯一决定，而 $F(\mathrm{d}x)$又由 f 唯一决定，可见在同分布的意义下，$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$唯一. ▌

命题 1.10 设 $\xi=\{\xi_t;t\in T\}$是 Gauss 系，则

(a) ξ 中的随机变量相互独立(即任何有限个相互独立)，当且仅当对$\forall s\neq t(s,t\in T)$，

$$\sigma(s,t) \triangleq E(\xi_s - E\xi_s)(\xi_t - E\xi_t) = 0.$$

(b) ξ 中的任意一个随机变量 ξ_{t_0}与$\{\xi_t;t\in T,t\neq t_0\}$相互独立当且仅当 $\sigma(t_0,t)=0(\forall t\in T,t\neq t_0)$. 即 ξ_{t_0}与任一个 ξ_t 不相关.

证明 只要考虑 ξ 中任意有限个随机变量 $\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n}$，记 $\sigma_{ij}\triangleq\sigma(t_i,t_j)$. 注意到当 $i\neq j$ 时，$\sigma_{ij}=0$. 不难验证

$$E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_{t_k}}\right) = \prod_{k=1}^{n}E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k\xi_{t_k}}\right).$$

这就证明了(a). (b)可同法证明. ▌

命题 1.11 设 $\xi=\{\xi_t,t\in T\}$是 Gauss 系. 又设 $\xi_{t_n}\in\xi$，且 $\xi_{t_n}\xrightarrow{p}\xi_0(n\to\infty)$(依概率收敛). 则

$$E|\xi_{t_n} - \xi_0|^2 \to 0 \quad (n \to \infty),$$

而且 ξ_0 一定也是 Gauss 分布的随机变量.

证明 因 $\xi_{t_n}\xrightarrow{p}\xi_0$，故对$\forall\varepsilon>0$，

$$P(|\xi_{t_j} - \xi_{t_k}| > \varepsilon) \to 0 \quad (k,j \to \infty). \tag{1.25}$$

而左边等于

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{jk}^2}}\int_{|x|>\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - m_{jk}}{\sigma_{jk}}\right)^2\right\}\mathrm{d}x,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\sigma_{jk}y + m_{jk}| > \varepsilon} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

其中

$$m_{jk} = E\xi_{t_j} - E\xi_{t_k}, \quad \sigma_{jk}^2 = E(\xi_{t_j} - \xi_{t_k} - m_{jk})^2.$$

令

$$\Phi(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

由(1.25),存在 N,使当 $j,k > N$ 时,$P(|\xi_{t_j} - \xi_{t_k}| > \varepsilon) < \Phi(1)$. 因此这时必有

$$P(\xi_{t_j} - \xi_{t_k} > \varepsilon) = P\left(y > \frac{\varepsilon - m_{jk}}{\sigma_{jk}}\right) < \Phi(1)$$

及

$$P(\xi_{t_j} - \xi_{t_k} < -\varepsilon) = P\left(y < -\frac{\varepsilon + m_{j_k}}{\sigma_{jk}}\right) < \Phi(1),$$

其中 $y = (\xi_{t_j} - \xi_{t_k} - m_{jk})/\sigma_{jk} \sim N(0,1)$. 因而

$$\frac{\varepsilon - m_{jk}}{\sigma_{jk}} > 1 \quad 且 \quad \frac{\varepsilon + m_{jk}}{\sigma_{jk}} > 1.$$

即有

$$m_{jk} + \sigma_{jk} < \varepsilon; \quad \sigma_{jk} - m_{jk} < \varepsilon.$$

两式相加得

$$\sigma_{jk} < \varepsilon/2.$$

代回去又得

$$|m_{jk}| < \varepsilon/2.$$

可见,当 $j,k \to +\infty$ 时

$$m_{jk}^2 + \sigma_{jk}^2 \to 0.$$

但是

$$E(\xi_{t_j} - \xi_{t_k})^2 = \sigma_{jk}^2 + m_{jk}^2,$$

于是得到 $\xi_{t_k} \xrightarrow{L_2} \xi_0$. 即有

$$E(\xi_{t_k} - \xi_0)^2 \to 0, \quad E|\xi_{t_k} - \xi_0| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

与

$$E(\xi_{t_k}-E\xi_{t_k})^2=E\xi_{t_k}^2-(E\xi_{t_k})^2$$
$$\to E\xi_0^2-(E\xi_0)^2=E(\xi_0-E\xi_0)^2.$$

而且

$$Ee^{i\lambda\xi_0}=\lim_{k\to\infty}Ee^{i\lambda\xi_{t_k}}=\lim_{k\to\infty}e^{i\lambda E\xi_{t_k}-\frac{1}{2}\lambda^2E(\xi_{t_k}-E\xi_{t_k})^2}=e^{i\lambda E\xi_0-\frac{1}{2}\lambda^2E(\xi_0-E\xi_0)^2}.$$

可见 ξ_0 仍服从 Gauss 分布. ▌

系 1 设$\{\xi_t;t\in T\}$是 Gauss 系. 又有 $t_l^k\in T(k=1,2,\cdots,m;l=1,2,\cdots)$. 对任何固定的 k, $\xi_{t_l^k}\xrightarrow{P}Y_k(l\to\infty)$, $\{\xi_t;t\in T\}\cup\{Y_k;k=1,2,\cdots,m\}$仍是一个 Gauss 系.

证明 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1},\cdots,\alpha_{n+m}$是任意一组实数, $\forall t_1,\cdots,t_n\in T$, 要证明

$$\sum_{k=1}^n\alpha_k\xi_{t_k}+\sum_{k=1}^m\alpha_{k+n}Y_k$$

是 Gauss 分布. 由于

$$\sum_{k=1}^n\alpha_k\xi_{t_k}+\sum_{k=1}^m\alpha_{k+n}Y_k=(P)\lim_{l\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n\alpha_k\xi_{t_k}+\sum_{k=1}^m\alpha_{k+n}\xi_{t_l^k}\right),$$

由命题 1.11 立得它服从 Gauss 分布. ▌

系 2 设 ξ 是一个 Gauss 系, 则 $\xi\subset L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$. 设$\bar{\xi}$是 ξ 在 $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$中的线性闭包, 则$\bar{\xi}$仍然是一个 Gauss 系.

证明 由于 $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$中收敛一定依概率收敛, 由系 1, 就立得$\bar{\xi}$仍是一个 Gauss 系. ▌

由此可见, 一个在线性运算及依概率收敛意义下(或 $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$收敛意义下)封闭的 Gauss 系, 是 $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$的一个子空间.

命题 1.12 设 ξ_0 是一个随机变量, 它与随机变量系 ξ 组成一个 Gauss 系. 令 $\mathscr{G}=\sigma(\xi)$, 则

$$E(\xi_0|\mathscr{G})=\mathrm{Proj}_{L(\xi)}\xi_0\quad(\text{a. e. }P),$$

其中 $L(\xi)$ 是 ξ 在 $L^2(\Omega,\mathscr{G},P)\subset L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 中的线性闭包；而 $\mathrm{Proj}_{L(\xi)}\xi_0$ 表示 ξ_0 在 $L(\xi)$ 中的正交投影（不妨设所有随机变量的期望为 0）.

证明 不失一般性，不妨设 $E\xi_0=0$. 令

$$Y \triangleq \mathrm{Proj}_{L(\xi)}\xi_0 \in \mathscr{G},$$

于是

$$E[(\xi_0 - Y)Z] = 0 \quad (\forall Z \in L(\xi)), \quad E(\xi_0 - Y) = 0.$$

可见 ξ_0-Y 与 $L(\xi)$ 不相关. 由 Gauss 性，就立即得到 ξ_0-Y 与 $L(\xi)$ 独立，因而也与 $\mathscr{G}=\sigma(L(\xi))=\sigma(\xi)$ 独立. 所以

$$E(\xi_0 - Y|\mathscr{G}) = E(\xi_0 - Y) = 0,$$

$$E(\xi_0|\mathscr{G}) = E(Y|\mathscr{G}) = Y.$$

也即

$$E(\xi_0|\mathscr{G}) = \mathrm{Proj}_{L(\xi)}\xi_0 \quad (\text{a.e.} P). \ \blacksquare$$

我们知道 Brown 运动是 Gauss 系，但反之不然. 因此，有关上面讨论的 Gauss 系的性质，除了本身重要外，对于第四章将讨论的 Brown 运动的性质也是十分重要的，在那里，我们将多次使用这里给出的结果.

由 Kolmogorov 定理可知

1° 对非负定函数 $B(s,t)$（即 $\forall n,t_1,\cdots,t_n,(B(t_i,t_j))$ 是非负定对称矩阵），存在 Gauss 系 $\{\xi_t;t\in T\}$，使 $E\xi_t=0,E\xi_s\xi_t=B(s,t)$.

2° 对非负定复函数 $B(s,t)$（即 $\forall n,t_1,\cdots,t_n,(B(t_i,t_j))$ 是非负定 Hermit 矩阵），存在复 Gauss 系 $\zeta_t=\xi_t+i\eta_t$（即 $\{\xi_t\},\{\eta_t\}$ 分别为 Gauss 系且相互独立）满足 $\{\xi_t\}$ 与 $\{\eta_t\}$ 同分布，$E\xi_t=0$ 且 $E(\zeta_s\overline{\zeta}_t)=B(s,t)$.

§6 平稳过程与宽平稳过程

本节我们将介绍另一类重要过程：（宽）平稳过程. 这类过程在系统论、信息论等领域经常遇到，自然在这些领域有重要应用. 详

细讨论我们将在第七章专门介绍.

1. 平稳过程

定义 1.6 设 T 是半群(通常取 T 为 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{R}^+$ 或 $\boldsymbol{Z}^+$). 概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机过程 $\xi=\{\xi_t;t\in T\}$ 称为平稳过程,如果对于 $\forall t_1,t_2,\cdots,t_n,h\in T$,都使 $(\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n})$ 与 $(\xi_{t_1+h},\cdots,\xi_{t_n+h})$ 同分布.

稳定系统中出现的随机过程通常为平稳的,因而在通讯、生物、统计物理、经济等问题的研究中,平稳过程也是常见的.

独立同分布序列是离散参数的平稳过程;时齐独立增量过程 $\xi=\{\xi_t;t\in T\}$ 在一个固定时间间隔上的增量 $\{\xi_{t+h}-\xi_t;t\in T\}$ 也是一个平稳过程.

2. 宽平稳过程

定义 1.7 设 T 是一个半群,概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机过程 $\xi=\{\xi_t;t\in T\}$ 称为宽平稳过程,如果 $E\xi_t=$ 常数且对任意 $t,t+h\in T$,协方差

$$E(\xi_t - E\xi_t)(\xi_{t+h} - E\xi_{t+h}))$$

存在而且与 t 无关(只依赖于 h).

显然,具有 2 阶矩的平稳过程一定是宽平稳的;但反之不真. 因而,宽平稳过程是平稳过程的推广,在许多实际问题中有广泛的应用.

对于 Gauss 过程,它的平稳性与宽平稳性是等价的;也就是有下面的关系:

命题 1.13 设有 Gauss 过程 $\{\xi_t;t\in\boldsymbol{R}^1\}$(即它是 Gauss 系),则以下命题等价:

a. $\{\xi_t;t\in\boldsymbol{R}^1\}$ 是平稳的;

b. $\{\xi_t;t\in\boldsymbol{R}^1\}$ 是宽平稳的;

c. $\forall t,h\in\boldsymbol{R}^1, E\xi_t=a, E((\xi_t-a)(\xi_{t+h}-a)=R(h)$ 都与 t 无关.

证明 由于Gauss过程的分布由$E\xi_t$与$E(\xi_t-a)(\xi_{t+h}-a)$完全决定，不难知道上述等价性是显然的. ▌

习　题

1. 试直接给出Bernoulli序列所定义的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，并定义出相应的随机过程.

2. 已知一列一维分布$\{F_n(x);n\geqslant 1\}$，试构造一个概率空间及其上的一个相互独立的随机变量序列$\{\xi(n,\cdot);n\geqslant 1\}$使$\xi(n,\cdot)$的分布函数为$F_n(\cdot)$.

3. 设T为任一参数集，$m(t)(t\in T)$为任意复值函数，$\{\lambda(s,t);s,t\in T\}$为双变量复值函数，满足条件

1) $\lambda(s,t)=\overline{\lambda(t,s)}$（共轭对称性）；

2) 对任意$t_j\in T(j=1,\cdots,n)$及复数$a_1,\cdots,a_j$，有

$$\sum_{j,k=1}^{n}\lambda(t_j,t_k)a_j\bar{a}_k\geqslant 0\quad（非负定性）.$$

试构造一个概率空间及其上的一族复值随机变量$\{\xi(t,\cdot);t\in T\}$，使得对任意有限个时间$t_1,\cdots,t_n\in T$，$(\xi(t_1,\cdot),\cdots,\xi(t_n,\cdot))$的联合分布都是正态分布，而且以$(m(t_1),\cdots,m(t_n))$为数学期望，以$(\lambda(t_i,t_j))_{n\times n}$为协方差矩阵.

4. 试证明例3中，由条件1)～3)可得：

1) $p_0(t)$是不增函数.

2) $\lim\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{1-p_0(t)}{t}$存在. 若将其记为$\lambda$，则$0<\lambda<+\infty$.

3) 在有限时间只可能有有限个粒子被接收.

4) $\{\xi_t(\omega);t\in[0,+\infty)\}$对几乎所有$\omega$是$t$的单调非降整值函数，而且跃度为1.

5. 试对Poisson过程构造一个以$\boldsymbol{R}^+$上全体阶梯增函数（每个跳跃点跃度为1）为Ω的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，并在其上定义一

个随机过程 $\xi=\{\xi(t,\cdot);t\in\boldsymbol{R}^+\}$ 使得它满足例 3 中提出的条件.

6. 试构造一个概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及其上一个随机过程，使它的任何有限个时刻的联合分布满足例 4 的要求 1),2). 这个过程是否已经是 Brown 运动？为什么？

7. 设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是一列均值为零的相互独立的随机变量序列，试判断下面各例中何者为鞅？

1) $\xi_n=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$.

2) $\xi_n=X_1+\cdots+X_n$.

3) $\xi_n=\mathrm{e}^{X_1+\cdots+X_n}$.

4) $\xi_n=X_1X_2\cdots X_n$.

5) $\xi_n=(X_1+1)(X_2+1)\cdots(X_n+1)$.

8. 令 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是一列相互独立且服从 $N(0,1)$（正态分布）的随机变量. 又令

$$S_n=X_1+\cdots+X_n,$$

$$\xi_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{S_n^2}{2(n+1)}},$$

$$\mathscr{F}_n=\sigma(X_1,\cdots,X_n).$$

试证明：$(\xi_n,\mathscr{F}_n;n\geqslant 1)$ 是下鞅（参见 23 题）.

9. 证明命题 1.4 中各条件的等价性.

10. 试证明独立增量过程是马氏过程.

11. 设连续地相互独立地投掷一个六面骰子. 又设各面被掷得的机会完全均等. 若将到第 n 次为止掷得的最大点数记为 X_n，令

$$\Omega=\{(\omega_1,\cdots,\omega_n,\cdots);\omega_n=1,2,\cdots,6\},$$

$$\mathscr{F}=\sigma(\text{柱集}).$$

试定义 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的一个概率测度 P，使得 $\{\xi_n(\omega)=\omega_n\}$ 是一个独立同分布的随机变量列，而且

$$P(\omega_n=i)=\frac{1}{6}\quad(i=1,2,\cdots,6).$$

(事实上,这里 $\xi_n(\omega)=\omega_n$ 表示第 n 次投掷结果.)于是 $X_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\xi_k$. 试证明$\{X_n;n\geqslant1\}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个马氏链,并写出它的一步转移函数$\{p(n,k;n+1,l);k,l=1,2,\cdots,6\}$.

12. 设 $\mathscr{S}=\{1,2,\cdots,m\}$,$\Sigma=\mathscr{S}$ 的全体子集,$T=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 设给定矩阵$(p_{ij})_{m\times m}$使得

1) $0\leqslant p_{ij}\leqslant1\quad(1\leqslant i,j\leqslant m)$,

2) $\sum\limits_{j=1}^{m}p_{ij}=1$.

令 $\Omega=\mathscr{S}^T$,$\mathscr{F}=\sigma(\Omega$ 的柱集). 试构造$(\Omega,\mathscr{F})$上的一个概率测度 P,以及$(\Omega,\mathscr{F},P)$上一个以$(\mathscr{S},\Sigma)$为状态空间的马氏链 $\xi=\{\xi_t,t\in T\}$使得

$$(*)\qquad E(\xi_{n+1}=j|\xi_n=i)=p_{ij},$$

并证明,满足(*)的$(\Omega,\mathscr{F},P)\mapsto(\mathscr{S},\Sigma)$的马氏链的转移函数$\{p(n,i;m,A);i\in\mathscr{S},A\in\Sigma\}$是唯一的.

13. 令 $X_t=\sin Ut$,其中 U 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个随机变量,服从$[0,2\pi]$的均匀分布. 试证:

1) $\{X_n;n=1,2,\cdots\}$是一个宽平稳过程,但不是平稳过程.

2) $\{X_t;t\in[0,+\infty)\}$既不是宽平稳也不是平稳过程.

14. 试证时齐独立增量过程 $\xi=\{\xi_t,t\in\boldsymbol{R}^+\}$的差

$$\{\xi_{t+h}-\xi_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}\quad(h>0)$$

是平稳过程.

15. 试证明:$\xi_t=A\cos(Ut+\varphi)$(其中 φ 与 U,A 独立,服从$[0,2\pi]$均匀分布)是一个平稳过程.

16. 设 ξ,η 都是 Gauss 系,试证 ξ,η 相互独立当且仅当$L(\xi)$,$L(\eta)$是相互正交的两个 $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$的子空间.

17. 命题 1.12 是否可以推广到 Gauss 系以外的随机变量族去? 如可能应怎样推广?

18. 设 $F(\cdot)$是$(\boldsymbol{R}^+,\mathscr{B}^+)$($\mathscr{B}^+$是 $\boldsymbol{R}^+$ 上的全体 Borel 集类)上的一个有限测度. 试证明:存在一个 Gauss 系$\{\xi_t,t\in\boldsymbol{R}\}$,使得

$$E\xi_t = 0, \quad E\xi_t\xi_s = \int_0^\infty \cos\lambda(t-s)F(\mathrm{d}\lambda).$$

19. 设$\{X,Y\}$(X,Y是两个随机变量)是 Gauss 系，则

$$\mathrm{Proj}_{L(Y)}X = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_{YY}}(Y - EY) + EX,$$

其中$\sigma_{XY}=E(X-EX)(Y-EY)$，$\sigma_{YY}=E(Y-EY)^2$；而且，$X,Y$相互独立当且仅当$\sigma_{XY}=0$.

20. 当$\{X,\xi_t;t\in T\}$是 Gauss 系，$\mathscr{F}=\sigma(\xi_t;t\in T)$时，试证明$X-E(X|\mathscr{F})$与$\mathscr{F}$独立.

21. 设$\{\xi(t,\cdot);t\in T\}$是对$\{\mathscr{F}_t;t\in T\}$定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的马氏过程，其中$\Omega=\mathscr{S}^T$，$\mathscr{F}=\Sigma^T$，$(\mathscr{S},\Sigma)$是一个可测空间. 于是对$\forall\omega\in\Omega$，$\omega=(\omega_t;t\in T)$令$\theta_\tau:\Omega\to\Omega$，$\theta_\tau\omega=(\omega_{t+\tau};t\in T)$，又设$p(s,x;t,A)=p(t-s,xA)$ $(\forall s<t\in T)$，试证明：对$\forall f\in\sigma(\xi(t,\cdot);t\in T)$，

$$E(f\circ\theta_t(\omega)|\mathscr{F}_t) = \varphi(\xi_t),$$

其中

$$\varphi(x) = E(f(\omega)|\xi_0 = x).$$

$$\xi_t(\omega) = \omega_t.$$

22. 设$\xi_t\sim N(m(t),R(t))$ $(R^{-1}\exists)$，则其分布密度$\rho(x,t)$满足

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla\cdot\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\nabla\rho\right) - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot\nabla\rho + \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}R^{-1}\right) - \frac{\mathrm{d}(\det R)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\det R}\right]\rho,$$

其中∇，$\nabla\cdot$分别为梯度与散度运算.

23. ξ_n称为$(\mathscr{F}_n)$下鞅列，如果$E|\xi_n|<\infty$，且

$$E(\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n) \geqslant \xi_n \quad (\forall\, n).$$

设ξ_n是$(\mathscr{F}_n)$下鞅列，λ_n是只取 0，1 两个值的随机变量，而且$\lambda_n\in\mathscr{F}_n$(对$\mathscr{F}_n$可测). 求证

$$\eta_n \triangleq \lambda_1 + \lambda_2(\xi_2 - \xi_1) + \cdots + \lambda_{n-1}(\xi_n - \xi_{n-1})$$

也是$(\mathscr{F}_n)$下鞅列.

24. 设 C_t 是时齐的独立增量过程，$C_0=0$，C_t-C_s 有分度密度 $\frac{1}{\pi}\frac{t-s}{(t-s)^2+x^2}$，求证 C_t 不是鞅，但是它是 1 阶稳定过程.

25. 证明分布函数族 $\{F_t\}$ 是某个时齐的独立增量过程 ξ_t 的分布（$\xi_t \sim F_t$）当且仅当满足

$$F_{t+s}=F_t*F_s,$$

其中 $*$ 表示卷积运算：

$$(f*g)(x) \triangleq \int f(x-y)g(\mathrm{d}y).$$

第二章　鞅论初步

鞅的概念首先由 P. Levy 在随机变量和的研究中引入概率论. 后来 J. Doob 又提出了上鞅与下鞅的概念，并对它们进行了系统的研究，用以解决许多概率论与古典分析的问题. P. Meyer 等在此基础上又进一步深入做了一系列工作，形成所谓法国 Strasbourg 学派的现代鞅论. 现在，鞅论方法已深入到许多领域中去，成为了一个强有力的研究工具.

本章中，我们只能限于讨论最基本的一些事实. 由于篇幅所限，我们侧重于离散参数的情况，对于那些在连续参数的情况下，困难大大增加的结果，我们只能略去其证明，或者不予讨论.

本章只考虑指标集 $T=\boldsymbol{R}^+$ 或 $\boldsymbol{Z}^+$ 的情况，以下不再一一声明.

§1　上鞅、下鞅的概念、简单性质与分解定理

1. 概念与简单性质

设在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上有一个非降的 σ-代数族 $\{\mathscr{F}_t;t\in T\}$ 及实随机过程 $\{\xi_t;t\in T\}$.

定义 2.1（适应）　过程 $\{\xi_t;t\in T\}$ 称为对 $\{\mathscr{F}_t;t\in T\}$ 是适应的，如果对 $\forall t\in T,\xi_t\in\mathscr{F}_t$（意即 ξ_t 对 $\mathscr{F}_t$ 可测）.

定义 2.2（上鞅与下鞅）　若有随机过程 $\{\xi_t;t\in T\}$ 对 $\{\mathscr{F}_t;t\in T\}$ 适应，称 $(\xi_t,\mathscr{F}_t)$ 是上鞅（下鞅），如果 $E|\xi_t|<+\infty$，而且对 $\forall s\leqslant t$

$$E(\xi_t|\mathscr{F}_s)\leqslant\xi_s\quad(E(\xi_t|\mathscr{F}_s)\geqslant\xi_s).\tag{2.1}$$

显然，$(\xi_t,\mathscr{F}_t)$ 是鞅，当且仅当它既是上鞅，又是下鞅.

命题 2.1 设$(\xi_t,\mathscr{F}_t)$，$(\eta_t,\mathscr{F}_t)$是上鞅(下鞅)，则

1) $E\xi_t$ 是非增的(非降的).

2) $(-\xi_t,\mathscr{F}_t)$是下鞅(上鞅).

3) 对任何非负实数 α,β，$(\alpha\xi_t+\beta\eta_t,\mathscr{F}_t)$是上鞅(下鞅).

4) $(\min(\xi_t,\eta_t),\mathscr{F}_t)$仍为上鞅($(\max(\xi_t,\eta_t),\mathscr{F}_t)$仍为下鞅).

证明 1) 由 $E(E(\xi_t|\mathscr{F}_s))=E(\xi_t)$与(2.1)式，结论显然成立. 2)与 3)是明显的. 4)成立是由于

$$E(\xi_t\wedge\eta_t|\mathscr{F}_s)\leqslant E(\xi_t|\mathscr{F}_s)\wedge E(\eta_t|\mathscr{F}_s)\leqslant\xi_s\wedge\eta_s. \blacksquare$$

命题 2.2 1) 设$(\xi_t,\mathscr{F}_t)$是下鞅，$\psi(\cdot)$是一个非降凸函数，而且 $E|\psi(\xi_t)|<+\infty$. 则$(\psi(\xi_t),\mathscr{F}_t)$是一个下鞅.

2) 特别当$(\xi_t,\mathscr{F}_t)$是鞅，或非负下鞅，则$\{|\xi_t|^r,\mathscr{F}_t\}$为下鞅($r\geqslant1$).

证明 1) 由条件期望的 Jensen 不等式

$$E(\psi(\xi_t)|\mathscr{F}_s)\geqslant\psi(E(\xi_t|\mathscr{F}_s))\geqslant\psi(\xi_s).$$

2) 当 $\xi_t\geqslant0$ 或 ξ_t 为鞅时，$|\xi_t|=\xi_t\vee0-\xi_t\wedge0$ 为下鞅，令 $\psi(x)=x^r(r\geqslant1,x\geqslant0)$是非降凸函数，于是$(|\xi_t|^r,\mathscr{F}_t)$是下鞅. $\blacksquare$

2. 例

例 1 设 X 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$中的一个随机变量，$E|X|<+\infty$，$\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$是一族非降 σ-代数，令

$$\xi_t=E(X|\mathscr{F}_t).$$

则$(\xi_t,\mathscr{F}_t)$是鞅.

由于当 $s<t$ 时，$\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t$，由条件期望的性质

$$E(\xi_t|\mathscr{F}_s)=E(E(X|\mathscr{F}_t)|\mathscr{F}_s)=E(X|\mathscr{F}_s)=\xi_s,$$

因而结论成立.

例 2 设在一个公平的简单博奕中，某人根据前面各次的博奕结果决定下一次的博奕金额. 设一开始有本金 ξ_0，又将第 n 次博奕后他所有的本金记为 ξ_n，下面我们证明无论此人的技术多么高，策略如何好，他每次博奕所赢得的金额的平均值一定只能是 0，除

非他有无限的博奕资金与时间.

事实上,若令

$$\eta_n = \begin{cases} 1, & \text{此人赢得第 } n \text{ 次博奕;} \\ -1, & \text{此人第 } n \text{ 次博奕失败.} \end{cases}$$

于是,$\{\eta_n\}$应是相互独立的同分布的随机变量列. 记

$$\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_0, \eta_1, \cdots, \eta_n).$$

又设此人第 n 次下的博奕金额是 $0 \leqslant b(\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_{n-1}) < +\infty$ ($\eta_0 = \xi_0$),那么当 $E\xi_0 < +\infty$时,对$\forall$ 整数 n,

$$\xi_n = \xi_0 + \sum_{k=1}^{n} b(\eta_0, \cdots, \eta_{k-1})\eta_k = \xi_{n-1} + b(\eta_0, \cdots, \eta_{n-1})\eta_n.$$

下面证明$(\xi_n, \mathscr{F}_n)$是鞅. 又由于 $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_0, \cdots, \xi_n)$,所以,$\{\xi_n\}$也是鞅. 事实上,

$$\begin{aligned} E(\xi_n | \mathscr{F}_{n-1}) &= \xi_{n-1} + E(b(\eta_0, \cdots, \eta_{n-1})\eta_n | \mathscr{F}_{n-1}) \\ &= \xi_{n-1} + b(\eta_0, \cdots, \eta_{n-1}) E(\eta_n | \mathscr{F}_{n-1}) \\ &= \xi_{n-1} + b(\eta_0, \cdots, \eta_{n-1}) E(\eta_n), \end{aligned}$$

由于博奕是公平的, $E\eta_n = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$, 于是

$$E(\xi_n | \mathscr{F}_{n-1}) = \xi_{n-1}.$$

所以,$E(\xi_n - \xi_{n-1} | \mathscr{F}_{n-1}) = 0$,也就说明了,在有限时间内,当 $b(\eta_0, \cdots, \eta_{n-1}) < +\infty$, $E(\xi_0) < +\infty$(博奕资金有限)时,无论采取什么策略,平均赢得 $E(\xi_n - \xi_{n-1}) = 0$.

例 3 在上例中如果是不公平博奕 $E\eta_n > 0$(或 $E\eta_n < 0$),那么容易看出

$$E(\xi_n | \mathscr{F}_{n-1}) \geqslant \xi_{n-1} \quad (\text{或 } E(\xi_n | \mathscr{F}_{n-1}) \leqslant \xi_{n-1}),$$

也就是$(\xi_n, \mathscr{F}_n)$是下鞅(或上鞅).

例 2 与例 3 是鞅和上鞅、下鞅的典型例子. 在第一章中,我们知道,一切均值定常的独立增量过程都是鞅,而例 2 给出了一个非独立增量鞅的例.

例 4(与分支过程相联系的鞅) 设单个细胞分裂的统计规律

是：分裂为 k 个细胞的概率为 $p(k)$，而且各细胞间的分裂是相互独立的，那么记第 n 代的第 k 个细胞的分裂的个数为 $\eta_{n,k}(\omega)$，那么 $\{\eta_{n,k};k=1,2,\cdots\}$ 就是相互独立同分布的随机变量，设 $E\eta_{n,k}=\mu$. 记第 n 代分裂后，细胞总数为 ξ_n，不失一般性，设 $\xi_0=1$，于是

$$\xi_n=\eta_{n,1}+\eta_{n,2}+\cdots+\eta_{n,\xi_{n-1}}.$$

而当 $E\eta_{n,k}<\infty$ 时，$\{\xi_n/\mu^n\}$ 是鞅. 这是因为

$$\begin{aligned}E\left(\frac{\xi_n}{\mu^n}\middle|\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}\right)&=E\left(\frac{\xi_n}{\mu^n}\middle|\xi_{n-1}\right)\\&=E\left(\frac{1}{\mu^n}(\eta_{n,1}+\cdots+\eta_{n,\xi_{n-1}})\middle|\xi_{n-1}\right)\\&=\frac{1}{\mu^n}\sum_{k=1}^{\xi_{n-1}}E(\eta_{n,k})=\frac{\xi_{n-1}\mu}{\mu^n}=\frac{\xi_{n-1}}{\mu^{n-1}}.\end{aligned}$$

例 5（似然比） 令 $\{\eta_n\}$ 是某总体的一列样本（即相互独立同分布的随机变量），设 f_0,f_1 是两个分布密度. 于是似然比

$$\xi_n\triangleq\prod_{i=1}^{n}\frac{f_1(\eta_i)}{f_0(\eta_i)}$$

是一个鞅（关于 f_0 所形成的概率测度）. 这个事实是非常容易验证的.

3. 分解定理

对于上鞅和下鞅，Doob 和 Meyer 给出了有名的分解定理，它是鞅论的基本定理之一，特别是连续参数的鞅分解定理是现代鞅论的开端，由于后者需要过多的准备知识与篇幅，我们只能略去它，而仅给出离散参数的鞅分解定理.

鞅分解定理的基本思想可以从例 3 看出. 事实上，我们可将 ξ_n 作如下分解：

$$\begin{aligned}\xi_n&=\xi_0+\sum_{k=1}^{n}b(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{k-1})\cdot\eta_k\\&=\left[\xi_0+\sum_{k=1}^{n}b(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{k-1})(\eta_k-E\eta_k)\right]\end{aligned}$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{n} b(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{k-1})E\eta_k\right].$$

令

$$M_n = \xi_0 + \sum_{k=1}^{n} b(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{k-1})(\eta_k - E\eta_k),$$

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} b(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{k-1})E\eta_k,$$

其中 $b(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})E\eta_n = E(\xi_n - \xi_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1})$.

显然，$(M_n,\mathscr{F}_n)$是鞅，$Z_n \in \mathscr{F}_{n-1}$，且当 $E\eta_n>0$ 时，$Z_n\uparrow$. 将这一事实一般化，就得到下面的分解定理.

定理 2.3(离散参数下鞅分解)　任给一个下鞅$(\xi_n,\mathscr{F}_n)(n\geqslant 1)$，必存在过程$\{M_n\}$与$\{Z_n\}$，使得

1) $(M_n,\mathscr{F}_n)$是鞅；

2) $Z_n\in\mathscr{F}_{n-1}(n\geqslant 2)$，$Z_1=0$，$Z_n\leqslant Z_{n+1}$，$EZ_n<+\infty$ 而且有分解式

$$\xi_n = M_n + Z_n \quad (n \geqslant 1).$$

这种分解还是唯一的.

证明　令 $\xi_0=0$，$Z_1=0$，$M_0=\xi_0$，及

$$M_n \triangleq \xi_n - \sum_{k=1}^{n} E(\xi_k - \xi_{k-1}|\mathscr{F}_{k-1}) \quad (n\geqslant 1),$$

$$Z_n \triangleq \xi_n - M_n = \sum_{k=1}^{n} E(\xi_k - \xi_{k-1}|\mathscr{F}_{k-1}) \quad (n\geqslant 2).$$

由于$(\xi_n,\mathscr{F}_n)$是下鞅，我们有

$$E(\xi_k - \xi_{k-1}|\mathscr{F}_{k-1}) \geqslant \xi_{k-1} - \xi_{k-1} = 0,$$

即 $Z_n\uparrow$，显然

$$Z_n \in \mathscr{F}_{n-1},\quad EZ_n \leqslant E(|\xi_n| + |\xi_1|) < +\infty.$$

另一方面，

$$E(M_n|\mathscr{F}_{n-1}) = E(\xi_n|\mathscr{F}_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n} E(\xi_k - \xi_{k-1}|\mathscr{F}_{k-1})$$

$$= E(\xi_n|\mathscr{F}_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n-1} E(\xi_k - \xi_{k-1}|\mathscr{F}_{k-1})$$

$$- E(\xi_n - \xi_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1})$$

$$= \xi_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} E(\xi_k - \xi_{k-1}|\mathscr{F}_{k-1})$$

$$= M_{n-1},$$

可见$(M_n,\mathscr{F}_n)$是鞅，而且$\xi_n = M_n + Z_n$.

唯一性. 设另有M_n',Z_n'满足上面定理的要求，则令

$$W_n \triangleq M_n - M_n' = Z_n' - Z_n.$$

于是

$$E(W_n|\mathscr{F}_{n-1}) = E(M_n|\mathscr{F}_{n-1}) - E(M_n'|\mathscr{F}_{n-1})$$

$$= M_{n-1} - M_{n-1}' = W_{n-1},$$

可见$(W_n,\mathscr{F}_n)$也是鞅. 另一方面，由$W_n = Z_n' - Z_n \in \mathscr{F}_{n-1}$必有

$$E(W_n|\mathscr{F}_{n-1}) = W_n.$$

所以

$$W_n = W_{n-1} = \cdots = W_1 = Z_1' - Z_1 = 0.$$ ▌

将定理 2.3 用于上段的例 3，就是说一个有利的不公平博奕，可以看作是一个公平博奕与一个以前各次平均盈利之和.

推论 1 如果$(X_n,\mathscr{F}_n)$是上鞅，则可分解为

$$X_n = M_n - Z_n,$$

使得$(M_n,\mathscr{F}_n)$是鞅，Z_n是一个增过程，$Z_n \in \mathscr{F}_{n-1}$，$Z_1 = 0$，$E(Z_n) < +\infty$.

证明 这里只要令$\xi_n = -X_n$，就立即得证.

推论 2 在定理中如$\sup\limits_n E|\xi_n| < +\infty$，则

$$\sup_n E|M_n| < +\infty, \quad \sup_n E|Z_n| < +\infty.$$

又如$\{\xi_n\}$一致可积分，则$\{M_n\}$，$\{Z_n\}$都一致可积分.

证明 1) 由于$Z_n \geq 0$,

$$\sup_n E|Z_n| = \sup_n EZ_n \leqslant \sup_n E|\xi_n| + |E\xi_1| <- \infty;$$

进而，

$$\sup_n E|M_n| \leqslant \sup_n E|\xi_n| + \sup_n EZ_n < + \infty.$$

2) 当$\{\xi_n\}$一致可积分时，令 $Z = \lim_n Z_n$（可以取无穷），由 1)就有

$$0 \leqslant EZ \leqslant \sup_n EZ_n < + \infty;$$

而且对$\forall A \in \mathscr{F}$，

$$E(Z_n 1_A) \leqslant E(Z 1_A),$$

$$E(|M_n| 1_A) \leqslant E(|\xi_n| 1_A) + E(Z_n 1_A).$$

由此得知，$\{Z_n\}$与$\{M_n\}$一致可积. ▌

§2 停时与鞅的停时定理(有限时间)

直观粗略地讲，停时是一个不依赖"将来"的随机时间，这里所谓的过去、现在与将来是由参考族$\{\mathscr{F}_t; t \in T\}$决定的. 下面我们给出停时的定义.

定义 2.3(停时) 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上有一个非降的 σ-代数族$\{\mathscr{F}_t; t \in T\}$. 一个取值于 $T \cup \{+\infty\}$的"随机变量"$\tau(\omega)$称为一个相对于$\{\mathscr{F}_t\}$的停时，如果对$\forall t \in T$，$\{\omega; \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$. 若$\{\omega; \tau(\omega) < t\} \in \mathscr{F}_t$，则称 τ 是相对于$\{\mathscr{F}_t\}$的宽停时.

显然，$\tau \equiv t$(常数时间)是一个停时. 可见停时是对时间的一个推广. 下面我们给出停时的非平凡例子，以期对停时有一个直观的了解.

例 6 设$\{\xi_n; n \in \mathbf{Z}^+\}$是状态空间为$(\mathscr{S}, \Sigma)$的一个随机序列，则对$\forall A \in \Sigma$，

$$\tau(\omega) = \min\{n; \xi_n(\omega) \in A\}$$

(当 $\xi_n(\omega)$永不到 A 中时理解为 $\tau(\omega) = +\infty$)是一个相对于$\{\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)\}$的停时. 事实上，$\tau(\omega)$是$\{\xi_n\}$初达 A 的时间.

证明 由于

$$\{\tau(\omega)>t\}=\{\omega:\xi_n\overline{\in}A,\forall\, n<t\}\in\mathscr{F}_t,$$

立知结论成立.

例 7 设$\{\xi_t:t\in\boldsymbol{R}^+\}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于度量空间$(\mathscr{S},\Sigma)$的沿轨道连续(即$\lim\limits_{t\to t_0}\xi_t(\omega)=\xi_{t_0}(\omega)$)的随机过程,又设$F$与$G$分别是$\mathscr{S}$的闭子集与开子集,则

$$\tau(\omega)=\inf\{t>0:\xi_t(\omega)\in F\}$$

与

$$\sigma(\omega)=\inf\{t>0:\xi_t(\omega)\in G\}$$

分别是相对于$\{\mathscr{F}_t=\sigma(\xi_s;s\leqslant t)\}$的停时与宽停时.

证明 首先,我们可以得到下列二等式:

$$\{\omega;\tau(\omega)\leqslant t\}=\bigcup_{s\leqslant t}\{\omega:\xi_s(\omega)\in F\};$$

$$\{\omega;\sigma(\omega)<t\}=\bigcup_{s<t}\{\omega;\xi_s(\omega)\in G\}.$$

这是因为,显然二等式的左边包含右边,又由于F和G^c都是闭集,ξ.沿轨道连续,故$\xi_{\tau(\omega)}(\omega)\in F$,$\xi_{\sigma(\omega)}(\omega)\in G^c$,从而二等式的反向包含关系也成立.于是,令

$$C_n=\left\{x\in\mathscr{S};\rho(F,x)\geqslant\frac{1}{n}\right\}\ (\rho(F,x)\text{是}F,x\text{的距离}),$$

可知C_n是闭集,而且

$$\begin{aligned}\{\omega;\tau(\omega)>t\}&=\bigcap_{s\leqslant t}\{\omega:\xi_s(\omega)\in F^c\}\\&\supseteq\bigcup_{n\geqslant 1}\ \bigcap_{s\leqslant t}\{\omega;\xi_s(\omega)\in C_n\}\\&=\bigcup_{n\geqslant 1}\ \bigcap_{\substack{r\text{为有理数}\\ r\geqslant 0}}\{\omega;\xi_{t-r}(\omega)\in C_n\}\in\mathscr{F}_t.\end{aligned}$$

另一方面,$\{\omega;\tau(\omega)>t\}$又包含在$\bigcup\limits_{n\geqslant 1}\bigcap\limits_{\substack{r\text{有理数}\\ 0\leqslant r\leqslant t}}\{\omega:\xi_{t-r}(\omega)\in C_n\}$.这是因为对后者的余集中任一点$\omega$,必有$r_n\in[0,t]$使$\rho(\xi_{t-r_n}(\omega),F)<\frac{1}{n}$.令$s=\varliminf\limits_{n}(t-r_n)\leqslant t$,由轨道连续性,$\xi_s=\lim\limits_{t\downarrow s}\xi_t$,

$$\rho(\xi_s(\omega),F)=\rho(\lim_{t\downarrow s}\xi_t(\omega),F)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ t-r_n\geqslant s}}\rho(\xi_{t-r_n}(\omega),F)=0.$$

可见 $\xi_s(\omega)\in F$，即 $\tau(\omega)\leqslant t$. 因此 $\{\omega:\tau(\omega)\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$.

$$\{\omega:\sigma(\omega)\geqslant t\}=\bigcap_{s<t}\{\omega:\xi_s(\omega)\in G^c\}$$

$$=\bigcap_{\substack{r\text{为有理数}\\ 0\leqslant r<t}}\{\omega:\xi_{t-r}(\omega)\in G^c\}\in\mathscr{F}_t.$$

可见，τ，σ 分别是停时与宽停时.

注：事实上，对于轨道右连续并有左极限的过程 ξ_t 及 $\forall$ Borel 集 B，令

$$\overline{\overline{\mathscr{F}}}_t\triangleq\bigcap_{P\text{为概率}}\mathscr{F}_t^P,\quad \mathscr{F}_t^P\triangleq\sigma(\xi_s:s\leqslant t)\vee\{\text{全体 }P\text{ 零测集}\},$$

则 $\inf\{t:\xi_t\in B\}$ 是对 $\{\overline{\overline{\mathscr{F}}}_t\}$ 的宽停时（证明需涉及容度论知识）.

命题 2.4 设有下鞅 $(\xi_n,\mathscr{F}_n)$ 及 $\{\mathscr{F}_n\}$ 的二停时 α,β 满足 $\alpha\leqslant\beta$. 则对任何正整数 n 有

$$E\xi_{n\wedge\alpha}\leqslant E\xi_{n\wedge\beta}.$$

证明 将 ξ_n 分解为

$$\xi_n=M_n+Z_n\quad(\text{定理 2.3}),$$

于是 $Z_{n\wedge\alpha}\leqslant Z_{n\wedge\beta}$，而

$$EM_{n\wedge\beta}=\sum_{k=0}^{n}E(M_k,\beta\wedge n=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}E(E(M_n|\mathscr{F}_k),\beta\wedge n=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}E(M_n,\beta\wedge n=k)=EM_n.$$

同理，$EM_{n\wedge\alpha}=EM_n$.

由上各式得到：

$$E\xi_{n\wedge\beta}=EM_{n\wedge\beta}+EZ_{n\wedge\beta}\geqslant EM_n+EZ_{n\wedge\alpha}$$

$$=EM_{n\wedge\alpha}+EZ_{n\wedge\alpha}=E\xi_{n\wedge\alpha}.\ \blacksquare$$

命题 2.5 停时一定也是宽停时；反之，若

$$\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}\left(\triangleq\bigcap_{\delta>0}\mathscr{F}_{t+\delta}\right)\quad(\forall t\in\boldsymbol{R}^+),$$

则宽停时也是停时. 进而,σ 是$\{\mathscr{F}_t\}$宽停时,当且仅当 σ 对$\{\mathscr{F}_{t+}\}$是停时.

证明 设 τ 是对$\{\mathscr{F}_t\}$的停时,则

$$\{\omega: \tau(\omega) < t\} = \bigcup_{n\geqslant 1}\left\{\omega: \tau(\omega) \leqslant t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathscr{F}_t.$$

可见,τ 也是宽停时.

当 σ 是宽停时时,我们有

$$\{\omega: \sigma(\omega) \leqslant t\} = \bigcap_{n\geqslant 1}\left\{\omega: \sigma(\omega) < t + \frac{1}{n}\right\} \in \mathscr{F}_{t+}.$$

因而 σ 对$\{\mathscr{F}_{t+}\}$是停时;又由于当 σ 对$\{\mathscr{F}_{t+}\}$是停时时,有

$$\{\omega: \sigma(\omega) < t\} = \bigcup_{n}\left\{\omega: \sigma(\omega) \leqslant t - \frac{1}{n}\right\},$$

$$\left\{\omega: \sigma(\omega) \leqslant t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathscr{F}_{\left(t-\frac{1}{n}\right)} \subset \mathscr{F}_t,$$

因此
$$\{\omega: \sigma(\omega) < t\} \in \mathscr{F}_t,$$
即 σ 是$\{\mathscr{F}_t\}$宽停时. 从而,σ 是宽停时,当且仅当 σ 对$\{\mathscr{F}_{t+}\}$是停时. 若 $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$,则宽停时必为停时. ▌

定义 2.4(α 以前的 σ-代数) 设 α 是一个相对于$\{\mathscr{F}_t\}$的停时,α 以前的 σ-代数定义为

$$\mathscr{F}_\alpha \triangleq \{\Lambda \in \mathscr{F}_\infty: \Lambda \cap \{\omega: \alpha(\omega) \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t, \forall\, t \in T\},$$

其中 $\mathscr{F}_\infty = \sigma(\mathscr{F}_t; t \in T)$.

命题 2.6 设 α,β 是相对于$\{\mathscr{F}_t\}$的停时,则

1) $\alpha \in \mathscr{F}_\alpha$;

2) $\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta$,及 $\alpha+\beta$ 都是停时;

3) $\alpha \leqslant \beta$ 时,$\mathscr{F}_\alpha \subset \mathscr{F}_\beta$.

证明 1) 由$\{\omega: \alpha(\omega) \leqslant t\} \cap \{\omega: \alpha(\omega) \leqslant s\} = \{\omega: \alpha \leqslant t \wedge s\} \in \mathscr{F}_t$,可见$\{\omega: \alpha(\omega) \leqslant t\} \in \mathscr{F}_\alpha$,即 $\alpha \in \mathscr{F}_\alpha$.

2) 由于$\{\omega: \alpha \wedge \beta \leqslant t\} = \{\omega: \alpha \leqslant t\} \cap \{\omega: \beta \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$;

$$\{\omega: \alpha \vee \beta \leqslant t\} = \{\omega: \alpha \leqslant t\} \cup \{\omega: \beta \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$$

及

$$\{\omega:\alpha+\beta\leqslant t\}\subset\bigcap_n\bigcup_{k\geqslant 1}\left\{\omega:\frac{k-1}{n}<\alpha\leqslant\frac{k}{n}\leqslant t,\beta\leqslant t-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right\}$$
$$\subset\bigcap_n\left\{\omega:\alpha+\beta\leqslant t+\frac{1}{n}\right\}$$
$$=\{\omega:\alpha+\beta\leqslant t\},$$

以及上式中间的集合属于 $\mathscr{F}_t$，可见 2)成立.

3) 设 $\Lambda\in\mathscr{F}_\alpha$，由

$$\Lambda\cap\{\omega:\beta(\omega)\leqslant t\}$$
$$=[\Lambda\cap\{\omega:\alpha(\omega)\leqslant t\}]\backslash[\Lambda\cap\{\omega:\alpha(\omega)\leqslant t,\beta(\omega)>t\}]\in\mathscr{F}_t,$$

可见 $\Lambda\in\mathscr{F}_\beta$，因而 $\mathscr{F}_\alpha\subset\mathscr{F}_\beta$. ▌

下面我们将给出的定理 2.9 对停时 α 及 $\mathscr{F}_\alpha$ 的含义作了清晰的说明. 为此，让我们先作一些准备.

定义 2.5(循序可测) $\{\xi_t(\omega);t\in\boldsymbol{R}^+\}$称为对$\{\mathscr{F}_t\}$循序可测，若对$\forall t\geqslant 0$，$\{\xi_s(\omega);s\in[0,t],\omega\in\Omega\}$作为$(s,\omega)$的二元函数对 $\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{F}_t$ 可测(其中 $\mathscr{B}([0,t])$是$[0,t]$上的 Borel 可测集类).

易见，对于$(\mathscr{F}_t)$适应的右连续过程是循序可测的.

命题 2.7 设$\{\xi_n;n\in\mathbf{Z}^+\}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于$(\mathscr{S},\Sigma)$中的随机序列，$\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_s;s\leqslant n)$，$\tau$ 是相对于$\{\mathscr{F}_n\}$的停时，则

$$\xi_\tau(\omega)1_{\{\omega:\tau(\omega)<+\infty\}}(\omega)\in\mathscr{F}_\tau.$$

证明 不失一般性，无妨设 $\tau(\omega)<+\infty$. 对$\forall A\in\Sigma$，我们有

$$\{\omega:\xi_\tau(\omega)\in A,\tau(\omega)\leqslant n\}$$
$$=\bigcup_{k=1}^{n}\{\omega:\xi_k(\omega)\in A,\tau(\omega)=k\}\in\mathscr{F}_n,$$

因而 $\xi_\tau 1_{\{\omega:\tau(\omega)<+\infty\}}\in\mathscr{F}_\tau$. ▌

命题 2.8 若 τ 是相对于$\{\mathscr{F}_t\}$的停时且 $\tau(\omega)<+\infty$ a.e.，$\{\xi_t(\omega)\}$对$\{\mathscr{F}_t\}$循序可测，则 $\xi_\tau(\omega)\in\mathscr{F}_\tau$.

证明 用测度论的典型方法(见附录定理)容易证明：当$(a,b]\subset[0,t]$，$\Lambda\in\mathscr{F}_t$，由

$$\{\omega:(t\wedge\tau(\omega),\omega)\in[a,b]\times A\}=\{\omega:t\wedge\tau\in(a,b]\}\cap A\in\mathscr{F}_t$$

知，对$\forall B\in\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{F}_t$，$\{\omega:(t\wedge\tau(\omega),\omega)\in B\}\in\mathscr{F}_t$. 再注意到$\{\xi_t(\omega)\}$对$\{\mathscr{F}_t\}$循序可测，就有

$$\{(s,\omega):\xi_s(\omega)\in A,s\leqslant t\}\in\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{F}_t,$$

因而

$$\{\omega:\xi_{t\wedge\tau}(\omega)\in A\}=\{\omega:(t\wedge\tau,\omega)\in\{(s,\omega):\xi_s(\omega)\in A,s\leqslant t\}\}$$

就应在$\mathscr{F}_t$中，于是

$$\{\omega:\xi_\tau(\omega)\in A,\tau\leqslant t\}=\{\omega:\xi_{t\wedge\tau}(\omega)\in A;\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t.$$

可见$\xi_\tau\in\mathscr{F}_\tau$. ▌

注：如果不要求$\tau(\omega)<+\infty$ a.e.，则只要用$\xi_\tau(\omega)I_{\tau<\infty}$代替$\xi_\tau(\omega)$，结论仍然成立.

现在，我们在一个随机过程$\{\xi_t,t\in T\}$的样本轨道空间上考虑问题，即令

$$\Omega_0=\{\omega=(\omega(t);t\in T):\text{全体 }T\text{ 上函数}\}.$$

取$\Omega\subset\Omega_0$，使得对$\forall\omega\in\Omega$，必存在$\omega_t\in\Omega$，使

$$\omega_t(s)=\omega(s\wedge t).$$

意思是，若把Ω中某一ω，从t开始让它停止不动而得一个新的ω_t仍在Ω中. 记

$$\alpha_t:\omega\longmapsto\omega_t,\text{即 }\alpha_t\omega=\omega_t.$$

于是

$$\omega(s\wedge t)=(\alpha_t\omega)(s)=\omega_t(s).$$

令$\xi_t(\omega)=\omega(t)$. 我们有下面结果.

定理 2.9 设$\mathscr{F}_t=\sigma(\xi_s(\omega);s\leqslant t)(0\leqslant t<+\infty)$；又设$\tau$是相对于$\{\mathscr{F}_t\}$的停时，于是我们有

1) $f(\omega)\in\mathscr{F}_t$当且仅当$f(\omega)=f(\alpha_t\omega)$.

2) $\tau(\omega)=\tau(\omega_\tau)(\omega_\tau\triangleq(\omega_{s\wedge\tau};s\in T))$.

3) $\mathscr{F}_\tau\subset\sigma(\xi_{t\wedge\tau}(\omega);t\in T)$.

4) $f(\omega)\in\mathscr{F}_\tau$，当且仅当$f(\omega)=f(\alpha_\tau\omega)$.

5) 当$\{\xi_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$循序可测，$\mathscr{F}_\tau=\sigma(\xi_{t\wedge\tau};t\in T)$.

证明 1）当 $f(\omega)\in\mathscr{F}_t$ 时，由附录定理我们知道：$\exists\ t_1,\cdots,t_n,\cdots\leqslant t$ 及无穷维 Borel 函数 $F(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$，使得

$$f(\omega)=F(\xi_{t_1}(\omega),\cdots,\xi_{t_n}(\omega),\cdots).$$

于是，由 $t_n\leqslant t$，我们就得到

$$\begin{aligned}f(\omega)&=F(\xi_{t_1\wedge t}(\omega),\cdots,\xi_{t_n\wedge t}(\omega),\cdots)\\&=F(\omega(t_1\wedge t),\cdots,\omega(t_n\wedge t),\cdots)\\&=F(\xi_{t_1}(\omega_t),\cdots,\xi_{t_n}(\omega_t),\cdots)\\&=f(\omega_t)=f(\alpha_t\omega).\end{aligned}$$

反之，若 $f(\omega)=f(\alpha_t\omega)$，则它应等于 $F(\xi_{t_1\wedge t},\cdots,\xi_{t_n\wedge t},\cdots)\in\mathscr{F}_t$.

2）对 $\forall t\in T$，$1_{\{t\}}(\tau(\omega))\in\mathscr{F}_t$，因而由 1）得到

$$1_{\{t\}}(\tau(\omega))=1_{\{t\}}(\tau(\alpha_t\omega)).$$

可见当 $\tau(\omega)=t$ 时，$\tau(\alpha_t\omega)=t$ 也成立，即有

$$\begin{aligned}\tau(\omega)&=1_{\bigcup\limits_{t\geqslant 0}\{\omega;\tau(\omega)=t\}}\tau(\omega_t)\\&=1_{\bigcup\limits_{t\geqslant 0}\{\omega;\tau(\omega)=t\}}\tau(\omega_\tau)=\tau(\omega_\tau).\end{aligned}\tag{2.2}$$

3）对 $\forall A\in\mathscr{F}_\tau$，应有

$$1_A(\omega)1_{\{s;s\leqslant t\}}(\tau(\omega))\in\mathscr{F}_t.$$

于是，由 1），2）得到

$$1_A(\omega)1_{\{s;s\leqslant t\}}(\tau(\omega))=1_A(\omega_t)1_{\{s;s\leqslant t\}}(\tau(\omega)),$$

特别以 τ 代 t，上式两边仍应相等：

$$1_A(\omega)1_{\{s;s\leqslant \tau\}}(\tau(\omega))=1_A(\omega_\tau)1_{\{s;s\leqslant \tau\}}(\tau(\omega)),$$

由于 $\tau(\omega)\in\{s:s\leqslant\tau(\omega)\}$，它也就是

$$1_A(\omega)=1_A(\omega_\tau).\tag{2.3}$$

又由 $1_A(\omega)\in\mathscr{F}_\infty$，可见存在 $t_n\in T(n=1,2,\cdots)$ 及无穷维 Borel 函数 F，使得

$$1_A(\omega)=F(\xi_{t_1}(\omega),\cdots,\xi_{t_n}(\omega),\cdots).\tag{2.4}$$

综合(2.2)～(2.3)就得到

$$F(\xi_{t_1}(\omega),\cdots,\xi_{t_n}(\omega),\cdots)=1_A(\omega)=1_A(\omega_\tau)$$

$$= F(\xi_{t_1}(\omega_\tau), \cdots, \xi_{t_n}(\omega_\tau), \cdots)$$
$$= F(\xi_{t_1 \wedge \tau}(\omega), \cdots, \xi_{t_n \wedge \tau}(\omega), \cdots)$$
$$\in \sigma(\xi_{t\wedge\tau}; t \in T),$$

即
$$\mathscr{F}_\tau \subset \sigma(\xi_{t\wedge\tau}; t \in T).$$

4) 由测度论典型方法，可以证明：$f \in \mathscr{F}_\tau$ 蕴含 $f(\omega) = f(\alpha_\tau \omega)$. 事实上，令

$$\mathscr{L} = \{f \geqslant 0 : f \in \mathscr{F}_\tau, f(\omega) = f(\alpha_\tau, \omega)\}.$$

显然 $\mathscr{L}$ 是一个单调类. 由 3)得到一切 $\mathscr{F}_\tau$ 中的集合的特征函数在 $\mathscr{L}$ 中，于是立即可以得到 $\mathscr{L}$ 包含一切对 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的非负函数. 对一般 $f \in \mathscr{F}_\tau$，它一定可被分解为二个 $\mathscr{F}_\tau$ 的非负可测函数之差，因而 $f \in \mathscr{L}$.

另一方面，由 1)，$1_{[0,t]}(\tau(\omega)) = 1_{[0,t]}(\tau(\alpha_t \omega))$，于是当 $f(\omega) = f(\omega_\tau)$ 时有

$$g(\omega) \triangleq f(\omega) 1_{[0,t]}(\tau(\omega)) = f(\omega_\tau) 1_{[0,t]}(\tau(\omega))$$
$$= f(\omega_{\tau\wedge t}) 1_{[0,t]}(\tau(\alpha_t \omega)) = f(\alpha_t \omega_\tau) 1_{[0,t]}(\tau(\alpha_t \omega)) = g(\alpha_t \omega).$$

再由 1)就得到 $g \in \mathscr{F}_t$，从而 $f(\omega) \in \mathscr{F}_\tau$.

5) 由命题 2.8，我们有 $\xi_{\tau\wedge t} \in \mathscr{F}_{\tau\wedge t} \subset \mathscr{F}_\tau$，于是 $\sigma(\xi_{t\wedge\tau}, t \in T) \subset \mathscr{F}_\tau$，再结合 3)就得到 $\mathscr{F}_\tau = \sigma(\xi_{t\wedge\tau}; t \in T)$. ▌

正如前面所指出的，停时是一种随机时间，那么它在什么程度上与普通的时间有相同的性质呢？下面的定理告诉我们，在某些条件下用一列停时代入一个鞅(上鞅或下鞅)的时间参数，仍能保持鞅(上鞅或下鞅)性.

定理 2.10 令 $T = \{t_1, \cdots, t_N\}$. 设 $\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$ 是 T 上非降 σ-代数族，又有相对于 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的两个停时 $\tau \leqslant \sigma$，如果 $\{\xi_t, \mathscr{F}_t; t \in T\}$ 是鞅(上鞅或下鞅)，则 $\{\xi_\tau, \xi_\sigma; \mathscr{F}_\tau, \mathscr{F}_\sigma\}$ 是二项鞅(上鞅或下鞅).

证明 1) 先证 ξ_σ, ξ_τ 可积分. 事实上，

$$E|\xi_\sigma| = \sum_{k=1}^{N} E(|\xi_{t_k}| 1_{\{\sigma = t_k\}}) \leqslant \sum_{k=1}^{N} E|\xi_{t_k}| < +\infty,$$

同理 ξ_τ 也可积分.

2) 设$(\xi_t,\mathscr{F}_t)$是鞅,对$\forall A\in\mathscr{F}_\tau\subset\mathscr{F}_\sigma$,

$$\begin{aligned}E(\xi_\sigma 1_A)&=\sum_{k=1}^{N}E(\xi_{t_k}1_{A\cap\{\omega;\sigma(\omega)=t_k\}})\\&=\sum_{k=1}^{N}E(E(\xi_{t_N}|\mathscr{F}_{t_k})1_{A\cap\{\omega;\tau(\omega)\leqslant t_k\}\cap\{\omega;\sigma(\omega)=t_k\}})\\&=\sum_{k=1}^{N}E(E(\xi_{t_N}1_{A\cap\{\omega;\tau(\omega)\leqslant t_k\}}1_{\{\omega;\sigma(\omega)=t_k\}}|\mathscr{F}_{t_k}))\\&=\sum_{k=1}^{N}E(\xi_{t_N}1_{A\cap\{\omega;\sigma(\omega)=t_k\}})=E(\xi_{t_N}1_A).\end{aligned}$$

类似地,也可以得到 $E(\xi_\tau 1_A)=E(\xi_{t_N}1_A)$. 于是

$$E(\xi_\sigma 1_A)=E(\xi_\tau 1_A),$$

即 $E(\xi_\sigma|\mathscr{F}_\tau)=\xi_\tau$.

3) 当$(\xi_t,\mathscr{F}_t)$是上鞅(或下鞅),利用分解定理(定理 2.3 及其推论 1)我们得到

$$\xi_t=M_t+Z_t,$$

其中$(M_t,\mathscr{F}_t)$是鞅,而$\{Z_t\}$是降(增)过程,于是

$$Z_\tau(\omega)\geqslant Z_\sigma(\omega)\quad(\text{或 } Z_\tau(\omega)\leqslant Z_\sigma(\omega)),$$

再由 2)的结果,我们得到

$$\begin{aligned}E(\xi_\sigma|\mathscr{F}_\tau)&=E(M_\sigma|\mathscr{F}_\tau)+E(Z_\sigma|\mathscr{F}_\tau)\\&=M_\tau+E(Z_\sigma|\mathscr{F}_\tau)\leqslant E(M_\tau+Z_\tau|\mathscr{F}_\tau)=\xi_\tau.\ \blacksquare\end{aligned}$$

上面的定理只是停时定理的一个极简单的特例,对一般的 $T=\boldsymbol{Z}^+,\boldsymbol{R}^+$,也有相应的结果,但它要用到鞅的一致可积性与收敛性方面的一些结果,我们只能在下面 §4 再进一步讨论.

§3 不等式、收敛定理

1. 鞅不等式

对于独立随机变量和序列,有著名的 Kolmogorov 不等式,鞅

作为独立和的推广，也有相应的结果. 下面我们就给出这个不等式.

定理 2.11 若$\{\xi_t,\mathscr{F}_t,t\in T\}$是沿轨道右连续的①下鞅，则对$\forall s_0<t_0\in T,\lambda>0$，有

1) $P(\omega: \sup\limits_{s_0\leqslant t\leqslant t_0}\xi_t(\omega)\geqslant\lambda)\leqslant\dfrac{1}{\lambda}E(\xi_{t_0}1_{\{\omega:\sup\limits_{t_0\leqslant t\leqslant t_0}\xi_t(\omega)\geqslant\lambda\}})$

$\leqslant\dfrac{1}{\lambda}E\xi_{t_0}^{+}$（$\xi_{t_0}^{+}$ 为 ξ_{t_0} 的正部）；

2) $P(\omega: \sup\limits_{t_0\leqslant t\leqslant t_0}\xi_t(\omega)>\lambda)\leqslant\dfrac{1}{\lambda}E(\xi_{t_0}1_{\{\omega:\sup\limits_{s_0\leqslant t\leqslant t_0}\xi_t(\omega)>\lambda\}})$；

3) $\lambda P(\omega: \inf\limits_{s_0\leqslant t\leqslant t_0}\xi_t(\omega)\leqslant-\lambda)$

$\leqslant E(\xi_{t_0}-\xi_{s_0})-E(\xi_{t_0}1_{\{\omega:\inf\limits_{s_0\leqslant t\leqslant t_0}\xi_t(\omega)\leqslant-\lambda\}})$

$\leqslant E(\xi_{t_0}^{+})-E(\xi_{s_0})$；

4) $\lambda P(\omega: \inf\limits_{s_0\leqslant t\leqslant t_0}\xi_t(\omega)<-\lambda)$

$\leqslant E(\xi_{t_0}-\xi_{s_0}-E(\xi_{t_0}1_{\{\omega:\inf\limits_{s_0\leqslant t\leqslant t_0}\xi_t(\omega)<-\lambda\}})$.

证明 1) 先设$T\subset\mathbf{Z}^{+}$. 于是，在$[s_0,t_0]$中 T 只有有限个元素. 令

$$A=\{\omega: \max_{s_0\leqslant k\leqslant t_0}\xi_k(\omega)>\lambda\},$$

$$A_k=\{\omega:\xi_k(\omega)>\lambda,\ \max_{s_0\leqslant j<k}\xi_j(\omega)\leqslant\lambda\}.$$

显然，$A_k\in\mathscr{F}_k$；$A_k\cap A_j=\varnothing$（当 $k\neq j,k,j\in[s_0,t_0]$）；$A=\bigcup\limits_{k=s_0}^{t_0}A_k$.

于是

$$P(A)=\sum_{k=s_0}^{t_0}P(A_k)\leqslant\sum_{k=t_0}^{t_0}E\left(\frac{\xi_k}{\lambda}1_{A_k}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda}\sum_{k=s_0}^{t_0}E(\xi_{t_0}1_{A_k})=\frac{1}{\lambda}E(\xi_{t_0}1_A).$$

① 指 $\lim\limits_{t\downarrow s}\xi_t(\omega)=\xi_s(\omega)$ 对 $\forall s\in T$ 成立(a.e. P).

2）对一般情况，令

$$t_{n,m}=s_0+\frac{m}{2^n}(t_0-s_0)\quad(m=0,1,2,\cdots,2^n),$$

由 1)及 $\max\limits_{s_0\leqslant t_{n,k}\leqslant t_0}\xi_{t_{n,k}}(\omega)$ 对 n 的单调性，我们就得到

$$\begin{aligned}P(\omega:\sup_{s_0\leqslant t\leqslant t_0}\xi_t(\omega)>\lambda)&=P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega:\max_{s_0\leqslant t_{n,k}\leqslant t_0}\xi_{t_{n,k}}(\omega)>\lambda\}\Big)\\&=\lim_{n\to\infty}P(\{\omega:\max_{s_0\leqslant t_{n,k}\leqslant t_0}\xi_{t_{n,k}}(\omega)>\lambda\})\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda}E(\xi_{t_0}1_{\{\omega:\max\limits_{s_0\leqslant t_{n,k}\leqslant t_0}\xi_{t_{n,k}}(\omega)>\lambda\}})\\&=\frac{1}{\lambda}E(\xi_{t_0}1_{\{\omega:\sup\limits_{s_0\leqslant t\leqslant t_0}\xi_t(\omega)>\lambda\}}).\end{aligned}$$

进而，我们又有

$$\begin{aligned}P(\omega:\sup_{s_0\leqslant t\leqslant t_0}\xi_t(\omega)\geqslant\lambda)&\leqslant\lim_{n\to\infty}P\Big(\omega:\sup_{s_0\leqslant t\leqslant t_0}\xi_t(\omega)>\lambda-\frac{1}{n}\Big)\\&\leqslant\lim_{n\uparrow\infty}\frac{1}{\lambda}E\Big(\xi_{t_0}1_{\{\omega:\sup\limits_{s_0\leqslant t\leqslant t_0}\xi_t(\omega)>\lambda-\frac{1}{n}\}}\Big)\\&=\frac{1}{\lambda}E\Big(\xi_{t_0}1_{\{\omega:\sup\limits_{s_0\leqslant t\leqslant t_0}\xi_t(\omega)\geqslant\lambda\}}\Big)\leqslant\frac{1}{\lambda}E(\xi_{t_0}^{+}).\end{aligned}$$

至此，定理的 1)，2)两部分得证.

3）现在对 $T\subseteq\mathbf{Z}^+$ 的情况证明定理的 4)这一部分. 令

$$\beta\triangleq\min\{t\in T;t\geqslant s_0,\xi_t<-\lambda\}\wedge t_0,$$

于是 $\beta\geqslant s_0$，而且是一个停时. 再令

$$B_k\triangleq\{\omega:\min_{s_0\leqslant t\leqslant k}\xi_t(\omega)<-\lambda\}\quad(k=t_0-1,t_0).$$

容易看出

$$B_{t_0}^c=\{\omega:\beta(\omega)=t_0\}\cap\{\omega:\xi_{t_0}(\omega)\geqslant-\lambda\},$$

$$B_{t_0-1}=\{\omega:\beta(\omega)\leqslant t_0-1\}\subset B_{t_0}.$$

再利用定理 2.10 就得到

$$E\xi_{s_0}\leqslant E\xi_\beta=E(\xi_\beta(1_{B_{t_0-1}}+1_{B_{t_0}B_{t_0-1}^c}+1_{B_{t_0}^c}))$$

$$\leqslant E(-\lambda 1_{B_{t_0-1}}) + E(-\lambda 1_{B_{t_0}B^c_{t_0-1}}) + E(\xi_{t_0} 1_{B^c_{t_0}})$$

$$= -\lambda P(B_{t_0}) + E\xi_{t_0} - E(\xi_{t_0} B_{t_0})$$

$$\leqslant -\lambda P(B_{t_0}) + E\xi^+_{t_0},$$

即

$$P(B_{t_0}) \leqslant \frac{1}{\lambda} E(\xi^+_{t_0} - \xi_{t_0}).$$

对 $T=\boldsymbol{R}^+$ 等参数连续的情况及定理的第 3)部分的证明类似于上面 2)中所作. ▌

推论 1 若$(\xi_t,\mathscr{F}_t)$是鞅，则对$\forall\lambda>0$，

$$P(\sup_{s_0\leqslant t\leqslant t_0} |\xi_t| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda} E\left(|\xi_{t_0}| 1_{\{\sup\limits_{s_0\leqslant t\leqslant t_0} |\xi_t| \geqslant \lambda\}}\right) \leqslant \frac{1}{\lambda} E|\xi_{t_0}|.$$

又若 $E\xi^2_1<+\infty$(对$\forall t\in T$)，则有 Doob 不等式：

$$P(\sup_{s_0\leqslant t\leqslant t_0} |\xi_t(\omega)| \geqslant \lambda) \geqslant \frac{1}{\lambda^2} E\xi^2_{t_0}.$$

证明留给读者完成.

推论 2 若$(\xi_t,\mathscr{F}_t)$是上鞅或下鞅，则

$$P(\sup_{s_0\leqslant t\leqslant t_0} |\xi_t| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}(2E|\xi_{t_0}| + E|\xi_{t_0}|).$$

2. 下鞅(上鞅)极限的存在性

鞅收敛定理是利用鞅解决许多不同领域中的问题的主要工具之一，十分重要.

本段中，我们讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n(\omega)$ 的存在性. 我们知道，任何一个实数列$\{a_n\}$没有有穷或无穷的极限就是

$$\underline{\lim_n} a_n < \overline{\lim_n} a_n,$$

也就是存在有理数 a,b，使得

$$\underline{\lim_n} a_n \leqslant a < b \leqslant \overline{\lim_n} a_n.$$

这就意味着$\{a_n\}$无穷多次到达(a,b)的左边与右边，就是说，$\{a_n\}$

跨越(a,b)无穷多次. 因此,研究一个鞅$(\xi_n,\mathscr{F}_n)$的收敛性,就是要研究它跨越(a,b)的次数. 下面先给出跨越次数的期望的估计.

设$\{\xi_n\}$是随机序列,令$\nu^{(n)}(a,b)(\omega)$是$\{\xi_1(\omega),\cdots,\xi_n(\omega)\}$向右跨越(上穿)$(a,b)$的次数. 记$\alpha_1$是$\{\xi_n\}$首次到达$(-\infty,a]$的时间,$\alpha_2$是$\alpha_1$之后首次到达$[b,+\infty)$的时间;即

$$\alpha_1=\min\{j\geqslant 1;\xi_j\leqslant a\};$$
$$\alpha_2=\min\{j>\alpha_1;\xi_j\geqslant b\}.$$

用归纳法定义

$$\alpha_{2k-1}=\min\{j>\alpha_{2k-2}:\xi_j\leqslant a\};$$
$$\alpha_{2k}=\min\{j>\alpha_{2k-1}:\xi_j\geqslant b\}.$$

于是若$\alpha_{2(l+1)}>n\geqslant\alpha_{2l}$,则$\nu^{(n)}(a,b)=l$.

引理 2.1 设$(\xi_n,\mathscr{F}_n;n\geqslant 1)$是一个下鞅,则对$\forall a<b$,$\{\xi_k(\omega)\}$在$n$以前向右跨越$(a,b)$的次数$\nu^{(n)}(a,b)$的数学期望应满足下述的上穿不等式

$$E(\nu^{(n)}(a,b)(\omega))\leqslant\frac{E(\xi_n-a)^+-E(\xi_1-a)^+}{b-a}\leqslant\frac{E\xi_n^++|a|}{b-a}.$$

证明 由于$\{(\xi_n-a)^+\}$仍为下鞅,而且它跨越$(0,b-a)$的次数就是$\nu^{(n)}(a,b)$,可见要证明此引理只要对非负下鞅考虑它跨越$(0,\bar{b})$ $(\bar{b}=b-a)$的次数即可. 令

$$\beta_k\triangleq\alpha_k\wedge n\leqslant n\quad(k\geqslant 0).$$

由于$\alpha_k(k\geqslant 0)$都是停时,所以$\beta_k(k\geqslant 0)$亦都是停时,而且它们都单调上升. 由停时定理(有限取值情况:定理 2.10),$\{\xi_{\beta_{k-1}},\xi_{\beta_k},\mathscr{F}_{\beta_{k-1}},\mathscr{F}_{\beta_k}\}$是二项下鞅,因而

$$E(\xi_{\beta_k}-\xi_{\beta_{k-1}})\geqslant 0.$$

我们得到

$$E(\xi_n-\xi_1)=\sum_{k=1}^{\infty}E(\xi_{\beta_k}-\xi_{\beta_{k-1}})\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}E(\xi_{\beta_{2m}}-\xi_{\beta_{2m-1}}).$$

注意到

$$\xi_{\beta_{2m}}-\xi_{\beta_{2m-1}}\geqslant\bar{b}1_{\{\omega;\nu^{(n)}\geqslant m\}},$$

于是

$$E(\xi_n - \xi_1) \geqslant \bar{b}E\Big(\sum_{m=1}^{\infty} 1_{\{\omega;\, m\leqslant \nu^{(n)}\}}\Big) = \bar{b}E(\nu^{(n)}(0,\bar{b})),$$

特别用$\{(\xi_n-a)^-\}$代入上式就得到

$$E(\nu^{(n)}(a,b)) \leqslant \frac{E(\xi_n - a)^+ - E(\xi_1 - a)^+}{b-a}. \blacksquare$$

推论 设$(\xi_n,\mathscr{F}_n)$是上鞅，$\hat{\nu}^{(n)}(a,b)$是$\{\xi_k\}$在 n 以前向左跨越(a,b)的次数，则

$$E(\hat{\nu}^{(n)}(a,b)) \leqslant \frac{E(\xi_1 \wedge b) - E(\xi_n \wedge b)}{b-a}.$$

证明 令 $\eta_n = -\xi_n$，$(\eta_n,\mathscr{F}_n)$是下鞅，$\hat{\nu}^{(n)}(a,b)$就是$\{\eta_n\}$跨越$(-b,-a)$的次数 $\nu^{(n)}(-b,-a)$，所以

$$\begin{aligned}E(\hat{\nu}^{(n)}(a,b,)) &= E(\nu^{(n)}(-b,-a)) \\ &\leqslant \frac{1}{b-a}(E(-\xi_n+b)^+ - E(-\xi_1+b)^+) \\ &= \frac{1}{b-a}(E(b - b\wedge\xi_n) - E(b - \xi_1\wedge b)) \\ &= \frac{1}{b-a}E(b\wedge\xi_1 - b\wedge\xi_n). \blacksquare\end{aligned}$$

特别当 $\xi_n \geqslant 0, b > a \geqslant 0$ 时，$E(\hat{\nu}^{(n)}(a,b)) \leqslant \frac{b}{b-a}$.

定理 2.12 设$(\xi_n,\mathscr{F}_n)$是下鞅，而且 $\sup\limits_n E|\xi_n| < +\infty$，则$\{\xi_n\}$几乎处处收敛到一个有限极限 ξ_∞，且 $\xi_\infty \in L^1(\mathrm{d}P)$.

证明 首先，对下鞅有

$$E\xi_n^+ \leqslant E|\xi_n| \leqslant 2E\xi_n^+ - E\xi_1,$$

因而$\sup\limits_n E|\xi_n| < +\infty$，当且仅当$\sup\limits_n E\xi_n^+ < +\infty$.

另一方面，$\nu^{(n)}(a,b) \uparrow \nu(a,b) \triangleq \{\xi_n\}$跨越$(a,b)$的次数，它应满足

$$\begin{aligned}E(\nu(a,b)) &= E(\lim_{n\to\infty}\nu^{(n)}(a,b)) = \lim_{n\to\infty}E(\nu^{(n)}(a,b)) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{E\xi_n^+ + |a|}{b-a} \leqslant \frac{\sup\limits_n E\xi_n^+ + |a|}{b-a} < +\infty.\end{aligned}$$

可见，$\nu(a,b)$几乎处处有限，从而

$$P(\omega: \text{当 } n\to\infty \text{ 时}, \xi_n(\omega) \text{ 无极限})$$
$$= P\Big(\bigcup_{a<b\text{有理数}} \{\omega: \underline{\lim_n}\xi_n(\omega) \leqslant a < b \leqslant \overline{\lim_n}\xi_n(\omega)\}\Big)$$
$$= P\Big(\bigcup_{a<b\text{有理数}} \{\omega: \nu(a,b) = +\infty\}\Big) = 0.$$

又由 Fatou 引理得到：

$$E|\xi_\infty| = E(\lim_n|\xi_n|) \leqslant \lim_n E|\xi_n| \leqslant \sup_n E|\xi_n| < +\infty.$$

从而，ξ_∞有限(a. e.)且属于 $L^1(\mathrm{d}P)$. ▌

推论 1 下列各种上鞅、下鞅几乎处处收敛到有限极限：

1) 满足条件 $\sup_n E|\xi_n| < +\infty$ 的任何上鞅或下鞅；

2) 非负上鞅；

3) 非正下鞅.

推论 2 设$\{\xi_t; t\in[a,b]\}$是上鞅(下鞅). 若有

$$-\infty<a<t_n<b<+\infty \quad (n=1,2,\cdots),\ t_n\uparrow t_0,$$

则极限$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_{t_n}(\omega)$ 几乎处处存在，而且

$$-\infty < \lim_{n\to\infty}\xi_{t_n}(\omega) < +\infty \quad (\text{a. e. }).$$

证明 由于对$\forall t\in(a,b)$，由上鞅性可得

$$-\infty < -E|\xi_b| \leqslant E\xi_b \leqslant E\xi_t \leqslant E\xi_a \leqslant E\xi_a^+ < +\infty;$$

又由于$\{-\xi_t^-\}$是下鞅，

$$E\xi_a^- \leqslant E\xi_t^- \leqslant E\xi_b^-,$$

我们就得到

$$\sup_{t\in(a,b)} E|\xi_t| = \sup_{t\in(a,b)} E(\xi_t + 2\xi_t^-) \leqslant E|\xi_a| + 2E|\xi_b|.$$

因而由定理就直接得到所要结论. ▌

定理 2.13(上鞅的反向极限) 设$\{\xi_t, \mathscr{F}_t; t\in T\}$是一个上(下)鞅，则对任意的 $t_n\in T, t_n\downarrow t_0 (t_0\geqslant -\infty)$，极限

$$\lim_{t_n\downarrow t_0}\xi_{t_n}(\omega) \triangleq \xi_\infty(\omega)$$

几乎处处存在，而且

$$-\infty < \xi_\infty(\omega) \leqslant +\infty \quad (\text{a.e.});$$

对下鞅的情况，相应地有

$$-\infty \leqslant \xi_\infty(\omega) < +\infty \quad (\text{a.e.}).$$

证明 首先，上鞅的反向列$\{\xi_{t_1},\xi_{t_2},\cdots,\xi_{t_N}\}$右穿越$(a,b)$的次数$\nu^{(N)}(a,b)$就是下鞅$\{-\xi_{t_N},-\xi_{t_{N-1}},\cdots,-\xi_{t_1}\}$的右穿越$(-b,-a)$的次数，所以由引理2.1，就有

$$E(\nu^{(N)}(a,b)) \leqslant \frac{E(\xi_{t_1}^-)+|b|}{b-a} < +\infty.$$

其次，类似于定理 2.12，$\xi_\infty \triangleq \lim\limits_{t_n \downarrow t_0} \xi_{t_n}(\omega)$ 几乎处处有意义（可以取$+\infty$或$-\infty$）. 又因为

$$E(\xi_\infty^-(\omega)) \leqslant \varliminf_{t_n \downarrow t_0} E(\xi_{t_n}^-(\omega)) \leqslant E(\xi_{t_1}^-(\omega)) < +\infty,$$

立即得到

$$-\infty < \xi_\infty(\omega) \leqslant +\infty \quad (\text{a.e.}).$$

对下鞅的情况，相应地得到

$$-\infty \leqslant \xi_\infty(\omega) < +\infty \quad (\text{a.e.}). \blacksquare$$

定理 2.13 的结果说明在几乎处处收敛的意义下，上鞅（下鞅）的反向极限一定存在. 这一事实在以离散参数去逼近连续参数上（下）鞅时很有用. 因为若令

$$\tau_n = \frac{[2^n\tau]+1}{2^n} \downarrow \tau,$$

则概率为 1 地反向极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_{\tau_n}$ 存在.

定理 2.14 设$\{\xi_n,\mathscr{F}_n;1\leqslant n<+\infty\}$是一个下鞅（上鞅）. 下列命题等价$\left(\mathscr{F}_\infty \triangleq \bigvee\limits_n \mathscr{F}_n\right)$：

1) $\{\xi_n\}$一致可积分；

2) $\xi_n \xrightarrow{L_1} \xi_\infty$；

3) $\xi_n \xrightarrow{\text{a.e.}} \xi_\infty$，$\xi_\infty$ 可积分，$\{\xi_n,\xi_\infty;\mathscr{F}_n,\mathscr{F}_\infty\}$ 组成一个下鞅

(上鞅)[①]，而且 $E\xi_n \to E\xi_\infty (n\to\infty)$.

证明 1)$\Longrightarrow$2). 设$\{\xi_n\}$一致可积分，则$\sup\limits_n E|\xi_n| < +\infty$. 由定理 2.12 得到 $\lim\limits_n \xi_n = \xi_\infty$ 几乎处处存在且有限. 进而，又由一致可积性可得

$$\lim_{n\to\infty} E|\xi_n - \xi_\infty| = E(\lim_n |\xi_n - \xi_\infty|) = 0.$$

2)$\Longrightarrow$3). 由于

$$\sup_n E|\xi_n| \leqslant \sup_n E|\xi_n - \xi_\infty| + E|\xi_\infty| < +\infty,$$

用定理 2.12 就得到 $\lim\limits_n \xi_n = \xi_\infty$ 几乎处处存在且有限，而且对 $\mathscr{F}_\infty$ 可测.

又因$(\xi_n, \mathscr{F}_n)$是下鞅，则对$\forall A \in \mathscr{F}_n$，

$$E(\xi_m 1_A) \geqslant E(\xi_n 1_A) \quad (m > n).$$

令 $m \to +\infty$，由于

$$E(|\xi_m - \xi_\infty| 1_A) \leqslant E(|\xi_m - \xi_\infty|) \to 0,$$

就有

$$E(\xi_\infty 1_A) = \lim_{m\to\infty} E(\xi_m 1_A) \geqslant E(\xi_n 1_A);$$

此即$\{\xi_n, \xi_\infty; \mathscr{F}_n, \mathscr{F}_\infty\}$仍为下鞅.

3)$\Longrightarrow$1). 由$\{\xi_n, \xi_\infty; \mathscr{F}_n, \mathscr{F}_\infty\}$是下鞅，知道$\{\xi_n^+, \xi_\infty^+; \mathscr{F}_n, \mathscr{F}_\infty\}$仍为下鞅. 于是，我们有 $E\xi_n^+ \leqslant E\xi_\infty^+ < +\infty$，即

$$\sup_n E\xi_n^+ \leqslant E\xi_\infty^+ < +\infty,$$

及

$$\sup_n E(\xi_n^+ 1_{\{\xi_n^+ \geqslant \lambda\}}) \leqslant \sup E(\xi_\infty^+ 1_{\{\xi_n^+ \geqslant \lambda\}}) \leqslant E(\xi_\infty^+ 1_{\{\sup\limits_n \xi_n^+ \geqslant \lambda\}}).$$

于是，若令 $t_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ 与 $\eta_{t_n} = \xi_n^+$，由下鞅不等式就可得到

$$P(\sup_n \xi_n^+ \geqslant \lambda) = P(\sup_{0\leqslant t_n \leqslant 1} \eta_{t_n} \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda} E\eta_1$$

$$= \frac{1}{\lambda} E\xi_\infty^+ \to 0 \quad (\lambda \to \infty).$$

---

① 这时称 $\{\xi_n, \mathscr{F}_n; 1 \leqslant n \leqslant +\infty\}$ 为一闭下鞅(闭上鞅).

因而，$\{\xi_n^+\}$是一致可积分的. 另一方面，

$$E\xi_n^- = E(\xi_n^+ - \xi_n) = E\xi_n^+ - E\xi_n$$
$$\to E\xi_\infty^+ - E\xi_\infty = E\xi_\infty^- < +\infty;$$

再注意到 $0 \leqslant (\xi_n^- - \xi_\infty^-)^- \leqslant \xi_\infty^-$，由控制收敛定理

$$\lim_n E(\xi_n^- - \xi_\infty^-)^- = E(\lim_n (\xi_n^- - \xi_\infty^-)^-) = 0,$$

这就得知

$$\lim_n E(\xi_n^- - \xi_\infty^-)^+) = \lim_n E[(\xi_n^- - \xi_\infty^-) + (\xi_n^- - \xi_\infty^-)^-] = 0.$$

也就是
$$\lim_n E|\xi_n^- - \xi_\infty^-| = 0.$$

因$\{\xi_n^+\}$一致可积分，就有

$$\lim_n E|\xi_n^+ - \xi_\infty^+| = 0.$$

所以

$$\lim_n E|\xi_n - \xi_\infty| \leqslant \lim_n E(|\xi_n^+ - \xi_\infty^+| + |\xi_n^- - \xi_\infty^-|) = 0.$$

于是得到$\{\xi_n\}$一致可积分. ▌

推论 1 若$\{\xi_n, \mathscr{F}_n; 1 \leqslant n < +\infty\}$是鞅，则下列命题等价：

1) $\{\xi_n\}$一致可积分；

2) 存在 ξ_∞ 使 $E|\xi_n - \xi_\infty| \to 0$；

3′) $\xi_n \to \xi_\infty$ (a. e.)，$\xi_\infty \in L^1(dP)$，而且$\{\xi_n, \mathscr{F}_n; 1 \leqslant n \leqslant \infty\}$是闭鞅；

4) 存在可积函数 Y 使得

$$\xi_n = E(Y|\mathscr{F}_n) \quad (n = 1, 2, \cdots);$$

并且在 4)成立时，$\xi_\infty = E(Y|\mathscr{F}_\infty)$.

证明 由定理已知 1)$\Longleftrightarrow$2)$\Longrightarrow$3′)；由于 $E\xi_n$ 与 n 无关，显然 3′)$\Longleftrightarrow$3)；在 4)中取 $Y = \xi_\infty$就看出 3′)$\Longrightarrow$4)；最后若 4)成立，就得到

$$\sup_n E|\xi_n| \leqslant E|Y| < +\infty.$$

另一方面，由假定 4)可知

$$E(\xi_n 1_{\{|\xi_n| \geqslant \lambda\}}) = E(Y 1_{\{|\xi_n| \geqslant \lambda\}}),$$

其中

$$P(|\xi_n|^- \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E|\xi_n|}{\lambda} \leqslant \frac{E|Y|}{\lambda} \to 0,$$

$\lambda \to \infty$，与 n 无关. 这就说明了 ξ_n 是一致可积的，也就是 1)成立. 这时对$\forall A \in \mathscr{F}_n$，

$$\begin{aligned} E(\xi_\infty 1_A) &= \lim_{m\to\infty} E(\xi_m 1_A) = \lim_{m\to\infty} E(E(Y|\mathscr{F}_m)1_A) \\ &= \lim_{m\to\infty} E(E(Y1_A|\mathscr{F}_m)) = E(Y1_A). \end{aligned}$$

再利用测度论典型方法，容易得到

$$E(\xi_\infty 1_A) = E(Y1_A) \quad \left(\forall A \in \mathscr{F}_\infty = \bigvee_n \mathscr{F}_n\right),$$

即

$$\xi_\infty = E(Y|\mathscr{F}_\infty). \quad \blacksquare$$

推论 2 非负上鞅一定是闭上鞅.

又若这时 $\lim\limits_{n\to+\infty} E\xi_n = E\xi_\infty$，则它一致可积分.

证明 设$(\xi_n, \mathscr{F}_n)$是非负上鞅，则

$$E\xi_1 \geqslant E\xi_n \downarrow; \quad \sup_n E|\xi_n| \leqslant E\xi_1 < +\infty.$$

于是，存在 $\xi_\infty \in L^1$，而且对$\forall A \in \mathscr{F}_m$，

$$E(\xi_\infty 1_A) \leqslant \lim_{n\to+\infty} E(\xi_n 1_A) \leqslant E(\xi_m 1_A).$$

即$\{\xi_n, \mathscr{F}_n; n=1,2,\cdots,+\infty\}$是闭上鞅.

后一结论就是定理中 3)$\Longrightarrow$1). $\blacksquare$

推论 3(反向极限与一致可积性) 设 $T=\{t_n; n=1,2,\cdots\}$，且 $t_n \downarrow t_0 (t_0 \geqslant -\infty)$，$\{\xi_t, \mathscr{F}_t; t \in (t_0, b] \cap T\}$是下(上)鞅，令

$$\xi_{t_0+}(\omega) = \lim_{t_n \downarrow t_0} \xi_{t_n}(\omega),$$

则以下四命题等价：

1) $\{\xi_{t_n}\}$一致可积分；

2) $E|\xi_{t_n} - \xi_{t_0+}| \to 0 \quad (n \to +\infty)$；

3) $\{\xi_{t_0+}, \cdots, \xi_{t_n}, \cdots, \xi_{t_1}; \mathscr{F}_{t_0+}, \cdots, \mathscr{F}_{t_n}, \cdots, \mathscr{F}_{t_1}\}$是下(上)鞅；

4) $\lim\limits_{t_n \downarrow t_0} E\xi_{t_n} > -\infty \quad (<\infty)$.

证明 1)$\Longrightarrow$2)$\Longrightarrow$3)都是与定理类似. 由 3)就有

$$E(\xi_{t_n}|\mathscr{F}_{t_0+}) \geqslant \xi_{t_0+} \Longrightarrow E\xi_{t_n} \geqslant E\xi_{t_0+} > -\infty,$$

即 4)成立. 下面证明 4)$\Longrightarrow$1). 我们有

$$E(|\xi_{t_n}|1_{\{\omega:|\xi_{t_n}(\omega)|\geqslant\lambda\}})=E(\xi_{t_n}^+1_{B_n})+E(-\xi_{t_n}1_{A_n})$$
$$\triangleq I_1+I_2, \tag{2.6}$$

其中

$$A_n\triangleq\{\omega:\xi_{t_n}(\omega)\leqslant-\lambda\},\quad B_n\triangleq\{\omega:\xi_{t_n}(\omega)\geqslant\lambda\}.$$

注意$\{\xi_{t_n}^+\}$也是下鞅,所以

$$P(B_n)\leqslant\frac{1}{\lambda}E\xi_{t_n}^+\leqslant\frac{1}{\lambda}E\xi_{t_1}^+\to0\quad(\lambda\to\infty,\text{对 }n\text{ 一致}).$$

从而

$$I_1=E(\xi_{t_n}^+1_{B_n})\leqslant E(\xi_{t_1}^+1_{B_n})\to0\quad(\lambda\to\infty,\text{对 }n\text{ 一致}).$$

又

$$\begin{aligned}I_2&=E(-\xi_{t_n}1_{A_n})=-E\xi_{t_n}-E(-\xi_{t_n}1_{A_n^c})\\&\leqslant-E\xi_{t_n}+E(\xi_{t_m}1_{A_n^c})\quad(\forall n\geqslant m,\text{由下鞅性})\\&=E(\xi_{t_m}-\xi_{t_n})-E(\xi_{t_m}1_{A_n}).\end{aligned}\tag{2.7}$$

于是由假定 4)可知,对任给 $\epsilon>0$,存在 M,当 $m\geqslant M$ 时,上式第一项小于 $\frac{\epsilon}{2}$. 固定某个 $m(\geqslant M)$,注意到

$$P(A_n)\leqslant\frac{1}{\lambda}E|\xi_{t_n}|\leqslant\frac{1}{\lambda}(2E\xi_{t_n}^+-E\xi_{t_n})$$
$$\leqslant\frac{1}{\lambda}(2E\xi_{t_n}^+-E\xi_{t_0+})\to0\quad(\lambda\to\infty,\text{关于 }n\text{ 一致})$$

就推出(2.7)中第二项对 n 一致地趋于 $0(\lambda\to\infty)$. 从而得到 $I_2\to0$ $(\lambda\to\infty$,对 n 一致). 与 I_1 的结论结合起来便得(2.6)左方对 n 一致地趋于 $0(\lambda\to\infty)$. 此即 1). ▌

§4 停时定理(一般情形)

现在我们有了足够的工具将§2 中的停时定理从 T 为有限集的情况推广到一般情况. 在推广过程中,我们将遇到两个问题:从有界停时到无界停时;从离散取值停时到连续取值停时. 下面我们

分别来处理.

定理 2.15 I（停时定理） 设$\{\xi_t,\mathscr{F}_t;t\in T\}$是一个闭下鞅（上鞅、鞅），其中$T=\{t_n;1\leqslant n\leqslant+\infty,t_n\uparrow t_\infty\leqslant+\infty\}$，又设$\tau\leqslant\sigma\leqslant t_\infty$是两个停时，则$E|\xi_\sigma|<+\infty,E|\xi_\tau|<+\infty$，而且$\{\xi_\tau,\xi_\sigma;\mathscr{F}_\tau,\mathscr{F}_\sigma\}$是二项下鞅（上鞅、鞅）.

证明 1）若令

$$\eta_t=E(\xi_{t_\infty}|\mathscr{F}_t)-\xi_t\ \text{（上鞅时取反号）},$$

则$\{\eta_t,\mathscr{F}_t;t\in T\}$是非负上鞅. 由此可见要证明本定理只需对非负上鞅和闭鞅两种情况来证明即可.

2）先考虑闭鞅$\xi_t=E(\xi_{t_\infty}|\mathscr{F}_t)$的情形. 对$\forall A\in\mathscr{F}_\sigma$我们有

$$\begin{aligned}E(\xi_\sigma 1_A)&=\sum_n(E\xi_\sigma 1_{A\cap\{\sigma=t_n\}})=\sum_n E(\xi_{t_n}1_{A\cap\{\sigma=t_n\}})\\&=\sum_n E(E(\xi_{t_\infty}|\mathscr{F}_{t_n})1_{A\cap\{\sigma=t_n\}})\\&=\sum_n E(\xi_{t_\infty}1_{A\cap\{\sigma=t_n\}})=E(\xi_\infty 1_A),\end{aligned}$$

可见
$$\xi_\sigma=E(\xi_{t_\infty}|\mathscr{F}_\sigma).$$
同理还有
$$\xi_\tau=E(\xi_{t_\infty}|\mathscr{F}_\tau).$$
因而

$$E(\xi_\sigma|\mathscr{F}_\tau)=E(E(\xi_{t_\infty}|\mathscr{F}_\sigma)|\mathscr{F}_\tau)=E(\xi_{t_\infty}|\mathscr{F}_\tau)=\xi_\tau.$$

即$\{\xi_\tau,\xi_\sigma;\mathscr{F}_\tau,\mathscr{F}_\sigma\}$是二项鞅.

3）当$\{\xi_t,\mathscr{F}_t;t\in T\}$是非负上鞅，我们有

$$\begin{aligned}E(\xi_{\sigma\wedge t_n}|\mathscr{F}_{t_{n-1}})&=E(1_{\{\sigma<t_n\}}\xi_\sigma+1_{\{\sigma\geqslant t_n\}}\xi_{t_n}|\mathscr{F}_{t_{n-1}})\\&=\sum_{m\leqslant n-1}1_{\{\sigma=t_m\}}\xi_{t_m}+1_{\{\sigma>t_{n-1}\}}E(\xi_{t_n}|\mathscr{F}_{t_{n-1}})\\&\leqslant\xi_\sigma 1_{\{\sigma\leqslant t_{n-1}\}}+\xi_{t_{n-1}}1_{\{\sigma>t_{n-1}\}}=\xi_{\sigma\wedge t_{n-1}}.\end{aligned}$$

可见$\{\xi_{\sigma\wedge t_n},\mathscr{F}_{t_n}\}$是非负上鞅，因而它一定是闭的（见定理 2.14 推论 2），而且

$$0\leqslant E(\xi_\sigma)\leqslant\lim_{n\to\infty}E(\xi_{\sigma\wedge t_n})\leqslant E(\xi_{\sigma\wedge t_1})=E\xi_{t_1}<+\infty.$$

进而类似于 2）中那样，我们可以得到

$$E(\xi_\sigma|\mathscr{F}_\tau)=\sum_n E(\xi_{\sigma\wedge t_\infty}|\mathscr{F}_{t_n})1_{\{\tau=t_n\}}$$

$$\leqslant \sum_n \xi_{\sigma\wedge t_n}1_{\{\tau=t_n\}}=\xi_\tau \quad (\text{因为 } t_n=\tau\leqslant\sigma). \blacksquare$$

注:某些书本中本定理常要求比闭性更强的一致可积性条件.从本定理的证明中可以看到对非负上鞅(即使它们并不一致可积),定理已经成立,因而对闭的下鞅与上鞅,本定理仍然成立.

定理 2.15 Ⅱ (停时定理,连续参数情形) 设$\{\xi_t,\mathscr{F}_t;t\in[t_0,t_1]\}$($0\leqslant t_0<t_1\leqslant+\infty$)为右连续闭下鞅(上鞅、鞅),$\tau\leqslant\sigma\leqslant+\infty$为二停时,则$\{\xi_\tau,\xi_\sigma;\mathscr{F}_\tau,\mathscr{F}_\sigma\}$为二项下鞅(上鞅,鞅).

证明 令$\tau_n\triangleq\dfrac{[2^n\tau]+1}{2^n}\downarrow\tau,\sigma_n\triangleq\dfrac{[2^n\sigma]+1}{2^n}\downarrow\sigma$ (当$n\to\infty$). 由定理 2.15 Ⅰ 就得到$\{\xi_{\tau_n},\mathscr{F}_{\tau_n};n=\cdots,m,\cdots,2,1\}$与$\{\xi_{\sigma_n},\mathscr{F}_{\sigma_n};n=\cdots,m,\cdots,2,1\}$是下鞅,而且有

$$E(\xi_{\sigma_n}|\mathscr{F}_{\tau_n})\geqslant\xi_{\tau_n},$$

即
$$E(\xi_{\sigma_n}1_A)\geqslant E(\xi_{\tau_n}1_A)\quad(\forall A\in\mathscr{F}_\tau\subset\mathscr{F}_{\tau_n}).$$

另一方面,由于$\lim\limits_{n\to\infty}E(\xi_{\sigma_n})\geqslant E(\xi_{t_0})>-\infty$,定理 2.14 的推论 3 保证$\{\xi_{\tau_n}\}$与$\{\xi_{\sigma_n}\}$一致可积分,于是对上面式子取极限就得到所要结论:

$$E(\xi_\sigma 1_A)\geqslant E(\xi_\tau 1_A)\quad(\forall A\in\mathscr{F}_\tau). \blacksquare$$

推论 1 当$\tau\leqslant\sigma\leqslant M$,定理中闭性要求可取消.

证明 在此情况下τ_n,σ_n都只取有限值,这时代之于定理证明中引用定理 2.15 Ⅰ 的是定理 2.10. ▌

推论 2 在定理中将闭性条件改为一致可积性,定理结论成立.

下面我们将进一步给出停时定理的加强形式,它在使用时更为方便.先证明一个引理.

引理 2.16 设ξ_t右连续且关于$(\mathscr{F}_t)$适应,τ,σ是关于$(\mathscr{F}_t)$的停时,则

$$\xi_\tau 1_{\{\tau\leqslant\sigma\}},\quad 1_{\{\tau>\sigma\}}\in\mathscr{F}_\sigma.$$

证明 由 $\mathscr{F}_\tau$ 的定义我们可得到

$$\eta\in\mathscr{F}_\tau\Longleftrightarrow\eta 1_{\{\tau\leqslant t\}}\in\mathscr{F}_t\quad(\forall t\in T).\qquad(2.9)$$

由于引理的假定，$\xi.$ 是循序可测的. 用命题 2.7 便得 $\xi_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}\in\mathscr{F}_\tau$. 但是

$$(\xi_\tau 1_{\{\tau\leqslant\sigma\}})1_{\{\sigma\leqslant t\}}=(\xi_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}1_{\{\tau\leqslant t\}})(1_{\{\tau\leqslant\sigma\}}1_{\{\tau\vee\sigma\leqslant t\}}),$$

注意到 $\tau,\sigma\in\mathscr{F}_{\tau\vee\sigma}$，所以

$$1_{\{\tau\leqslant\sigma\}}\in\mathscr{F}_{\tau\vee\sigma}.$$

从而由(2.9)可知上面等式中右边的两项都属于 $\mathscr{F}_t$. 再用一次(2.9)便得 $\xi_\tau 1_{\{\tau\leqslant\sigma\}}\in\mathscr{F}_\sigma$.

取 $\xi.\equiv 1$，我们得到 $1_{\{\tau\leqslant\sigma\}}\in\mathscr{F}_\sigma$. 所以我们有 $1_{\{\tau>\sigma\}}\in\mathscr{F}_\sigma$. ▎

定理 2.15Ⅲ（停时定理——加强形式） 设$\{\xi_t,\mathscr{F}_t\}$是右连续闭下鞅，τ,σ 是关于$(\mathscr{F}_t)$的停时，则

$$E(\xi_\tau|\mathscr{F}_\sigma)\geqslant\xi_{\tau\wedge\sigma}.$$

证明 用引理 2.1 我们有

$$\begin{aligned}E(\xi_\tau|\mathscr{F}_\sigma)&=E[(\xi_\tau 1_{\{\tau\leqslant\sigma\}}+\xi_{\tau\vee\sigma}1_{\{\tau>\sigma\}})|\mathscr{F}_\sigma]\\&=\xi_\tau 1_{\{\tau\leqslant\sigma\}}+1_{\{\tau>\sigma\}}E(\xi_{\tau\vee\sigma}|\mathscr{F}_\sigma)\\&\geqslant\xi_\tau 1_{\{\tau\leqslant\sigma\}}+1_{\{\tau>\sigma\}}\xi_\sigma\quad(\text{用定理 2.15 Ⅱ})\\&=\xi_{\tau\wedge\sigma}.\end{aligned}$$ ▎

推论 设$\{\xi_t,\mathscr{F}_t\}$是右连续下鞅，τ 是关于$(\mathscr{F}_t)$的停时，则$\{\xi_{t\wedge\tau},\mathscr{F}_t\}$是下鞅.

注： 这结论比$\{\xi_{t\wedge\tau},\mathscr{F}_{t\wedge\tau}\}$为下鞅强.

证明 用停时定理的加强形式于右连续闭下鞅$\{\xi_{t\wedge\cdot},\mathscr{F}_\cdot\}$，取 $\sigma=s$，我们得到

$$E(\xi_{t\wedge\tau}|\mathscr{F}_s)\geqslant\xi_{t\wedge\tau\wedge s}=\xi_{s\wedge\tau}\quad(s<t).$$ ▎

§5 修 正 定 理

在上节中，我们对连续时间参数的下(上)鞅，都假定了沿轨道

的右连续性. 下面的修正定理说明，这种假定并非条件过强.

定理 2.17(修正定理)　设$(\xi_t,\mathscr{F}_t)$是下(上)鞅，则

1) 存在下(上)鞅$(\eta_t,\mathscr{F}_{t+})$沿轨道右连续具有左极限且使

$$E(\eta_t|\mathscr{F}_t)\geqslant\xi_t.$$

2) $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$，则 $\xi_t\leqslant\eta_t$；又若 $E\xi_t$ 对 t 右连续，则

$$P(\xi_t=\eta_t)=1.$$

证明　本定理的证明的基本思想是取 η_t 为 $\lim\limits_{s_n\downarrow t}\xi_{s_n}$，但是我们需要对所有的 t，同时定义 η_t(a.e.)，这时若直接引用上节的收敛定理，不可列个零测度例外集的并不一定仍是零测集. 为此，我们考虑全体二进制有理点集，直接利用证明极限定理的思想与上(下)穿不等式(引理 2.1). 我们沿用定理 2.12 中的符号($\nu(a,b)$由离散参数自然地推广到连续参数).

1) 令 $\boldsymbol{Q}$ 为全体有理数，考虑对 t 递增的集合

$$\Lambda_1^t=\bigcup_{a,b\in Q\cap[0,t]}\{\omega:\nu(a,b)(\omega)=+\infty\},$$

$$\Lambda_2^t=\{\omega:\sup_{s\in Q\cap[0,t]}|\xi_s(\omega)|=+\infty\}.$$

显然，
$$P(\Lambda_1^t)=P(\Lambda_2^t)=0.$$

令
$$\Lambda_t=\Lambda_1^t\cup\Lambda_2^t,\quad \Lambda_{t+}=\bigcap_{s>t}\Lambda_s(\in\mathscr{F}_{t+}),\quad \Lambda=\bigcup_t\Lambda_{t+},$$

则
$$P(\Lambda)=0.$$

于是，$\forall\omega\in\Lambda_t^c$，都有 $\nu(a,b)(\omega)<+\infty(a,b\in\boldsymbol{Q})$. 因此当 $\omega\in\Lambda_t^c$，$\lim\limits_{\gamma\downarrow u}\xi_\gamma(\omega)$ 存在$(\gamma\in\boldsymbol{Q})$且有限.

对 $u<t$ 令

$$\eta_u(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{\gamma\downarrow u}\xi_\gamma(\omega), & \omega\in\Lambda_t^c;\\ 0, & \omega\in\Lambda_t.\end{cases}\tag{2.10}$$

显然
$$\eta_u\in\mathscr{F}_{u+}\triangleq\bigcap_{s>u}\mathscr{F}_s.$$

2) 现在来证明 $\eta_\cdot(\omega)(\omega\in\Lambda^c)$右连续. 事实上，由(2.10)，我们知道对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使当 $\gamma\in\boldsymbol{Q}$ 且 $0\leqslant\gamma-t<\delta$ 时，$|\eta_t-\xi_\gamma|<$

$\frac{\varepsilon}{2}$. 于是,当 $0 < s - t < \frac{1}{2}\delta$ 时,我们有

$$|\eta_t(\omega) - \eta_s(\omega)| = \lim_{\gamma \downarrow s} |\eta_t(\omega) - \xi_\gamma(\omega)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (\omega \in \Lambda^c),$$

此即 $\eta.(\omega)$ 右连续(当 $\omega \in \Lambda^c$ 时).

3) 往证 $\eta.(\omega)(\omega \in \Lambda^c)$ 在每个 t 具有左极限. 因为 $\omega \in \Lambda^c$, $\nu(a,b)(\omega) < +\infty$,于是对$\forall t$, $l \triangleq \lim\limits_{\gamma \uparrow t} \xi_\gamma(\omega)$ 存在($\gamma \in \boldsymbol{Q}$). 从而,对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,使得当 $0 < t - \gamma < \delta$ 时有 $|\xi_\gamma(\omega) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. 这样,对 $0<t-s<\delta$,我们有

$$|\eta_s(\omega) - l| = \lim_{\substack{s<\gamma<t \\ \gamma \downarrow s}} |\xi_\gamma(\omega) - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

即
$$\lim_{s \uparrow t} \eta_s(\omega) = l = \lim_{\gamma \uparrow t} \xi_\gamma(\omega) \quad (\omega \in \Lambda^c).$$

4) 本段证明$(\eta_t, \mathscr{F}_{t+})$是下鞅,而且 $E(\eta_t | \mathscr{F}_t) \geqslant \xi_t$. 由$(\xi_t, \mathscr{F}_t)$的下鞅性,$E\xi_t \uparrow$,于是

$$\lim_{\gamma \downarrow s} E\xi_\gamma \geqslant E\xi_s > -\infty.$$

由关于反向极限定理 2.14 推论 3,我们得到$\{\xi_\gamma; s \leqslant \gamma \leqslant t+1, \gamma \in \boldsymbol{Q}\}$一致可积分. 于是对$\forall A \in \mathscr{F}_{s+} \subset \mathscr{F}_{\gamma_n}(\gamma_n \in \boldsymbol{Q}, \gamma_n \geqslant s)$,我们就有

$$E(\eta_t 1_A) = E(\lim_{\gamma \downarrow t} \xi_\gamma 1_A) = \lim_{\gamma \downarrow t} E(\xi_\gamma 1_A)$$
$$\geqslant E(\xi_{\gamma_n} 1_A) \to E(\eta_s 1_A) \quad (\gamma_n \downarrow s, s \leqslant \gamma_n \leqslant t).$$

因此
$$E(\eta_t | \mathscr{F}_{s+}) \geqslant \eta_s.$$

另一方面,对 $A \in \mathscr{F}_t$,

$$E(\eta_t 1_A) = \lim_{\gamma \downarrow t} E(\xi_\gamma 1_A) \geqslant E(\xi_t 1_A),$$

即
$$E(\eta_t | \mathscr{F}_t) \geqslant \xi_t.$$

5) 当 $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$ 时,我们还进而有

$$\eta_t = E(\eta_t | \mathscr{F}_{t+}) = E(\eta_t | \mathscr{F}_t) \geqslant \xi_t.$$

6) 当 $E\xi_t$ 右连续时(即 $\lim\limits_{\gamma \downarrow t} E\xi_\gamma = E\xi_t$), 由于

$$E(\eta_t) = \lim_{\gamma \downarrow t} E\xi_\gamma = E\xi_t,$$

有
$$E(\eta_t - \xi_t) = 0,$$
再由 5)就得到
$$P(\eta_t - \xi_t = 0) = 1. \blacksquare$$

习　　题

1. 设$\{\xi_t, 0 \leqslant t < +\infty\}$是一个鞅，而且对$\forall 0 \leqslant s \leqslant t$，$E\xi_t = 0$，而且$E((\xi_t - \xi_s)^2 | \mathscr{F}_s) = F(t) - F(s)$，则$\{\xi_t^2 - F(t)\}$是鞅.

特别，当$\{\xi_t\}$是 Brown 运动时，$\{\xi_t^2 - t; t \geqslant 0\}$是鞅.

2. 设$\{M_t; t \in T\}$是鞅，则$\{|M_t|; t \in T\}$，$\{M_t^2; t \in T\}$，$\{e^{\lambda M_t}; t \in T\}$，$\{e^{CM_t^2}; t \in T\}$与$\{M_t \vee C; t \in T\}$当它们可积分时，都是下鞅. 而$\{M_t \wedge C; t \in T\}$是上鞅. 其中$\lambda, C$是常数.

3. 设$\{\xi_t, \mathscr{F}_t\}$$(t \in T)$是鞅，而且$E\xi_t^2 < +\infty$. 试证$\{\xi_t\}$的增量是不相关的，也即不相交的区间上的增量互不相关.

4. 设$\{\xi_n; n \geqslant 1\}$的定义同例 4，x是一正实数，令$\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^k < +\infty$，$\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)$，则$\{x^{\xi_n}, \mathscr{F}_n\}$是上鞅当$\alpha < 1$；是鞅当$\alpha = 1$；是下鞅当$\alpha > 1$.

5. 设$(M_n, \mathscr{F}_n)$是一个鞅，而且$EM_n^2 < +\infty$. 则必存在唯一的一个非降可积分的正随机序列$\{Z_n\}$，使得$Z_n \in \mathscr{F}_{n-1}$，而且$(M_n^2 - Z_n, \mathscr{F}_n)$是一个鞅.

6. 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上有概率测度$d\lambda$，而且$d\lambda \ll dP$. 又有一族σ-代数$\{\mathscr{F}_t; t \in T\}$使得$\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t (s \leqslant t)$，令$d\lambda_t, dP_t$分别是$d\lambda, dP$在$\mathscr{F}_t$上的限制. 若记$d\lambda_t$对$dP_t$的 Radon-Nikodym 导数$\dfrac{d\lambda_t}{dP_t} = \xi_t$，则$(\xi_t, \mathscr{F}_t)$是鞅.

7. 试举例说明在定理 2.3 中，若取消要求$Z_n \in \mathscr{F}_{n-1}$而改为$Z_n$对$\mathscr{F}_n$适应，则唯一性不成立.

8. 试证明例 5 中$\{\xi_n\}$是一个鞅.

9. 设 τ,σ 是相对于$\{\mathscr{F}_t\}$的停时，令 $\sigma_n=\frac{[2^n\sigma]+1}{2^n}(n\geqslant 1)$. 试证明：

1) σ_n 是停时，而且 $\sigma_n\downarrow\sigma(n\to+\infty)$；

2) $\{\omega:\sigma(\omega)<\tau(\omega)\}$与$\{\omega:\sigma(\omega)\leqslant\tau(\omega)\}$均属于 $\mathscr{F}_\sigma\cap\mathscr{F}_\tau$；

3) 对$\forall A\in\mathscr{F}_\sigma$，有 $A\cap\{\sigma<\tau\}$ 与 $A\cap\{\sigma\leqslant\tau\}\in\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$.

10. 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个概率空间，$(\xi_t,\mathscr{F}_t)$是鞅，$\overline{\mathscr{F}}_t$ 是 $\mathscr{F}_t$ 在测度 P 下的完备化. 令 $\overline{\mathscr{F}}_{t+}=\bigcap\limits_{s>t}\overline{\mathscr{F}}_s$，试证明$(\xi_t,\overline{\mathscr{F}}_t)$ 仍是鞅. 又若$\{\xi_t\}$沿轨道右连续，则$(\xi_t,\overline{\mathscr{F}}_{t+})$也是鞅.

11. 试证明右连续过程$\{\xi_t\}$若对于$\{\mathscr{F}_t\}$适应，则$\{\xi_t\}$对$\{\mathscr{F}_t\}$循序可测.

12. 设$\{\xi_t;t\in T\}$是右连续对$\{\mathscr{F}_{t+}\}$适应的过程，令

$$\alpha=\inf\{t>0:t\in T,\xi_t\in G\}\quad (G\text{ 为开集}),$$

试证明 α 是相对$\{\mathscr{F}_{t+}\}$的停时.

13. 设$\{\xi_n;n\in \boldsymbol{Z}^+\}$是对称随机徘徊(第一章例 2)，令

$$\tau=\min\{n:\xi_n=N\text{ 或 }\xi_n=-M\},\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_k;k\leqslant n).$$

试证明：对任意的 $n\geqslant 1$，$\tau\wedge n$ 是停时，$\tau\wedge n\uparrow\tau$ 也是停时，而且

$$\rho\triangleq P_0(\xi_\tau=-M)=\frac{N}{M+N},$$

$$P_0(\xi_\tau=N)=\frac{M}{M+N},$$

其中 P_0 表示过程从原点出发所对应的概率测度.

14. 考虑上例中 $p\neq\frac{1}{2}$ 的情况，证明

$$\rho=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^M-\left(\frac{q}{p}\right)^{M+N}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{N+M}}.$$

15. 设$\{\mathscr{F}_t;t\in[0,+\infty)\}$是单调上升、右连续的 σ-代数族，ξ 是一个随机变量，$E|\xi|<+\infty$，σ 是一个有限停时，试证明

$$E(\xi|\mathscr{F}_\sigma) = E(\xi|\mathscr{F}_t)|_{t=\sigma}.$$

16. 设$\{\xi_n,\mathscr{F}_n;n\geqslant 1\}$是一个鞅，$\tau_n\uparrow$是一列有界停时（即$\tau_n\leqslant t_0,n\geqslant 1$），则$\{\xi_{\tau_n},\mathscr{F}_{\tau_n};n\geqslant 1\}$是一个鞅.

17. 设$\{\xi_t,\mathscr{F}_t;t\in T\}$是一个右连续鞅，$f$是一个非负凸函数，则对$\forall\varepsilon>0$，

$$P(\sup_{t\in T} f(\xi_t)\geqslant\varepsilon)\leqslant\sup_{t\in T} Ef(\xi_t)/\varepsilon.$$

特别：对常数$C>0$有

$$P(\sup_{t\in T}\xi_t\geqslant\lambda)\leqslant\sup_{t\in T}E[\exp(C(\xi_t-\lambda))];$$

$$P(\inf_{t\in T}\xi_t\leqslant-\lambda)\leqslant\sup_{t\in T}E[\exp(-C(\xi_t+\lambda))];$$

$$P(\sup_{t\in T}|\xi_t|\geqslant\lambda)\leqslant\sup_{t\in T}E[\exp(C(|\xi_t|-\lambda))];$$

$$P(\sup_{t\in T}|\xi_t-E\xi_t|\geqslant\lambda)\leqslant\sup_{t\in T}E(\xi_t-E\xi_t)^2/\lambda^2.$$

18. 试证明对$C<\dfrac{1}{t}$，

$$P(\max_{0\leqslant s\leqslant t}|B_s|\geqslant\delta)\leqslant(1-Ct)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{C\delta^2}{2}\right),$$

其中$\{B_t;t\in[0,+\infty)\}$是Brown运动.进而证明可选取C使不等式右边达到最小，从而得到估计：

$$P(\max_{0\leqslant s\leqslant t}|B_s|\geqslant\delta)\leqslant\frac{\delta}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{\delta^2}{2t}+\frac{1}{2}\right)\quad(\text{对 } t<\delta^2).$$

19. 设$\{B_t;t\in[0,+\infty)\}$是Brown运动，$\mathscr{F}_t=\sigma(B_s;s\leqslant t)$，$\tau$是相对于$\{\mathscr{F}_t\}$的停时.则

$$EB_{\tau\wedge t}=0,\quad EB_{\tau\wedge t}^2=E(\tau\wedge t).$$

20. 在上题中令

$$\tau=\inf\{t>0;B_t\overline{\in}(a,b)\}\quad(-\infty<a,b<+\infty).$$

求$EB_\tau^2,EB_\tau,E\tau,P(B_\tau=a),P(B_\tau=b)$及$\tau$的分布（或拉氏变换）.

21. 设$\{\xi_n,\mathscr{F}_n;n\geqslant 1\}$是一个鞅，或非负下鞅，$\sup_n E\xi_n^2<+\infty$，则

$$\lim_n\xi_n=\xi_\infty<+\infty\quad(\text{a.e.}),$$

即 $$P(\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi_\infty < +\infty) = 1;$$

而且 $$E|\xi_n - \xi_\infty|^2 \to 0.$$

22. 设$\{\xi_n,\mathscr{F}_n;n\geqslant 1\}$是一个鞅，而且$\sup_n E|\xi_n| < +\infty$；又已知存在某一个$k\geqslant 1$，使

$$\lim_{n\to\infty}(E(\xi_n\xi_{n+k}) - E\xi_n E\xi_{n+k}) = 0.$$

则$\xi_n \to$常数$C(n\to\infty)$.

23. 试用鞅收敛定理证明任何独立中心随机变量($E\xi_n=0$)的和序列$S_n=\xi_1+\cdots+\xi_n$当满足$\sum_{n\geqslant 1}E\xi_n^2 < +\infty$时，概率为1地收敛.

24. 设$\{\xi_n;n\geqslant 1\}$是独立随机变量序列，令

$$A = \left\{\omega;\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n(\omega)| < +\infty\right\}.$$

试证明：$P(A)=0$ 或 1.

25. 试对以下情况举例：

1) $\{\xi_n,\mathscr{F}_n;n\geqslant 1\}$是鞅，$|\lim_n \xi_n| < +\infty$(a.e.)；但是，$\lim_{n\to\infty}E|\xi_n| = +\infty$.

2) $(\xi_t,\mathscr{F}_t)$是鞅，$\lim_{t\to\infty}\xi_t$ 不存在；但是$|E\xi_t|\leqslant M < +\infty$.

3) 一个正鞅$\{\xi_n,\mathscr{F}_n\}$不一致可积分.

26. 设$\{\xi_t,\mathscr{F}_t;t\in(0,\infty)\}$是右连续下鞅，$\tau\leqslant\sigma$为二停时，试证明

$$E(\xi_\tau 1_{\{\tau\leqslant t\}}) \leqslant E(\xi_\sigma 1_{\{\sigma\leqslant t\}}) + E(\xi_t 1_{\{\tau\leqslant t<\sigma\}}).$$

提示：考虑$\tau\wedge t$与$\sigma\wedge t$.

第三章　可数状态马氏过程——马氏链

本章将研究一种较简单的马氏过程——可数状态马氏过程，也称马氏链.

设 $\mathscr{S}\subset\mathbf{Z}^+$，$\Sigma$ 是 $\mathscr{S}$ 的一切子集组成的 σ-代数. 现考虑一个以 $(\mathscr{S},\Sigma)$ 为状态空间的马氏链 $\xi=\{\xi_t;t\in T\}$. 设 $T=\boldsymbol{R}^+$ 或 $\mathbf{Z}^+$.

在第一章中，我们已经看到：一个马氏过程的统计特性完全由它的初分布测度与转移概率决定，而后者在可数状态空间下还可以进一步简化. 事实上，令

$$p(0,i)\triangleq P(\xi_0=i)\quad(\forall\, i\in\mathscr{S}),$$

$$p(s,t;i,j)\triangleq P(\xi_t=j|\xi_s=i)\quad(\forall\, s\leqslant t;i,j\in\mathscr{S}),$$

则初分布测度与转移概率就可由 $\{p(0,i)\}$，$\{p(s,t;i,j)\}$ 决定：对 $\forall\, A\in\Sigma$，

$$p(0,A)=\sum_{j\in A}p(0,j);$$

$$p(s,t;i,A)=\sum_{j\in A}p(s,t;i,j).$$

于是，转移概率应满足的条件 $T.1)\sim T.3)$ 就变成：

$T.1'$）$p(s,t;i,j)\geqslant 0,\sum_{j\in\mathscr{S}}p(s,t;i,j)=1$；

$T.2'$）（Kolmogorov-Chapman 方程）对 $\forall\, s\leqslant t\leqslant\tau$，有等式

$$\sum_{j\in\mathscr{S}}p(s,t;i,j)p(t,\tau;j,k)=p(s,\tau;i,k).$$

$T.2$）在这里是自然成立的. 把 $\{p(s,t;i,j)\}$ 看成是一个矩阵 $\boldsymbol{P}(s,t)$（它的 i 行 j 列元素为 $p(s,t;i,j)$），于是 $T.1'$），与 $T.2'$），就变成

$T.1''$）$\boldsymbol{P}(s,t)$ 是非负矩阵，而且

$$\boldsymbol{P}(s,t)\mathbf{1}=\mathbf{1}\quad(\mathbf{1}=(1,1,\cdots,1,\cdots)^T).$$

$T.2''$) $\boldsymbol{P}(s,t)\boldsymbol{P}(t,\tau)=\boldsymbol{P}(s,\tau)$ ($\forall\ s<t<\tau$).

我们称满足 $T.1''$)的方阵为**随机阵**,称满足 $T.1''$)与 $T.2''$)的方阵族为转移阵族.

称 ξ 为时齐马氏链,如果我们有

$$\boldsymbol{P}(s,s+t)=\boldsymbol{P}(0,t)\quad(\forall\ s,t\in T),$$

将它记为 $\boldsymbol{P}(t)$,于是 $T.2'$)就是

$$\boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{P}(s+t)\quad(\forall\ s,t\in T),$$

这就是说$\{\boldsymbol{P}(s);s\in T\}$组成一个半群.

对 $T=\boldsymbol{Z}^+$(离散时间参数)的情况,我们还可以得到

$$\boldsymbol{P}(n)=(\boldsymbol{P}(1))^n\quad(\forall\ n\in T=\boldsymbol{Z}^+).$$

于是 ξ 的全部统计特征就由 $\boldsymbol{P}(1)$与$\{p(0,j)\}$决定.在这种情况下,我们说转移概率阵(或简称转移阵)就是指 $\boldsymbol{P}(1)$,以后有时简写为$\boldsymbol{P}$.将$\boldsymbol{P}$的第 i 行第 j 列元素记为 p_{ij},而将$\boldsymbol{P}^n=\boldsymbol{P}(n)$的第 i 行第 j 列元素记为 $p_{ij}(n)$.

为方便起见,我们将 $P(A|\xi_0=i)$记为 $P_i(A)$,$E(f|\xi_0=i)$记为 $E_i(f)$,且 $E_i(A)$理解为 $P_i(A)=E_i(1_A)$.

§1 离散时间时齐马氏链

1. 例

本节我们就一些具体的例子来考察它的转移阵.下面的例 1、例 2 已经在§1.1 节中提出了模型,此地不再重复,而只给出转移阵 $\boldsymbol{P}$.

例 1(Bernoulli 序列) $\{\xi_n;n\geqslant1\}$是相互独立同分布序列,而且

$$P(\xi_n=1)=p,\ P(\xi_n=-1)=q,$$
$$p+q=1.$$

可见 $\mathscr{S}=\{1,-1\}$.转移阵是一个二阶方阵:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix}.$$

例 2(随机徘徊)　$X=\{X_n; n \geqslant 0\}$，其中

$$X(n,\omega) = \sum_{K=1}^{n} \xi_K(\omega) + X_0 (X(n,\omega) = X_n(\omega))$$

(这里 $\xi_K(\omega)$即例 1 中所定义). 于是 $\mathscr{S}=\mathbf{Z}$，而

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j | X_n = i) &= P(\xi_{n+1} + X_n = j | X_n = i) \\ &= P(\xi_{n+1} = j - X_n | X_n = i) \\ &= P(\xi_{n+1} = j - i | X_n = i) \\ &= P(\xi_{n+1} = j - i) \\ &= \begin{cases} p, & \text{当 } j = i + 1; \\ q, & \text{当 } j = i - 1; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \end{aligned}$$

从而

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \cdots & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \\ & q & 0 & p & & 0 \\ & & q & 0 & p & \\ 0 & & & q & 0 & p \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}.$$

例 3(具有吸收壁的随机徘徊)　设一个粒子从$[0,N]$中的整格点出发，每次向左或向右走一步，如粒子到达 0 或 N 就在该点永远停住. 设粒子在格点 k 出发的条件下分别以 $p_k, q_k (p_k + q_k = 1)$的概率向右或向左走，设 $X_n(\omega)$表示走过第 n 步后粒子所在的位置的格点坐标. 于是$\{X_n, n \geqslant 0\}$是一个马氏链，其状态空间 $\mathscr{S}=\{0,1,\cdots,N-1,N\}$，而且

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1}=j | X_1, \cdots, X_{n-1}, X_n = i) \\ &\quad = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \end{aligned}$$

$$
=\begin{cases} p_i, & 1<j=i+1<N+1; \\ q_i, & 0\leqslant j=i-1<N-1; \\ 1, & i=0, j=0; \\ 1, & i=N, j=N; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}
$$

于是转移阵就是

$$
\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{N-1} & 0 & p_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

例 4(具有反射壁的随机徘徊)　在上例中如 $0, N$ 改为反射壁，即当 $X_n=0$ 或 N 时，$X_{n+1}=1$ 或 $N-1$，这时$\{X_n\}$仍为马氏链，而且

$$
\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{N-1} & 0 & p_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

例 5(分支过程)　在核子裂变或细胞分裂等过程中，每一代裂变后的某种粒子或细胞总数决定了下一代的粒子或细胞总数的分布，这就是分支过程. 在数学上它们抽象为以下模型.

设$\{\xi_{n,k}; n, k\geqslant 1\}$是一族相互独立取值于 $\mathbf{Z}^+$的同分布随机变量族，$P(\xi_{n,k}=i)=\mu_i (i=0,1,\cdots)$. 令

$$
X_{n+1}=\sum_{k=1}^{X_n}\xi_{n+1,k}, \quad X_0=1.
$$

这里 $\xi_{n+1,k}$表示第 n 代的第 k 个粒子的裂变情况，于是第 $n+1$ 次

裂变后的粒子总数是 X_{n+1}. 由于独立性

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=j,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)\\=P(\xi_{n+1,1}+\cdots+\xi_{n+1,i}=j)\\\cdot P(X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i),\end{aligned}$$

我们有

$$P(X_{n+1}=j|X_1,\cdots X_{n-1},X_n=i)=P(\xi_{n+1,1}+\cdots+\xi_{n+1,i}=j),$$

即

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=j|X_1,\cdots,X_{n-1},X_n)\\=P(\xi_{n+1,1}+\cdots+\xi_{n+1,X_n}=j)\\=P(X_{n+1}=j|X_n).\end{aligned}$$

可见 $\{X_n;n\geqslant 0\}$ 是马氏过程. 注意到当 $X_n=i$ 时, X_{n+1} 是 i 个相互独立同分布的随机变量之和,可算出转移阵为

$$\boldsymbol{P}(1)=(p_{ij}),$$

其中

$$p_{ij}=\left.\frac{\partial^j\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k x^k\right)^i\right]}{j!\,\partial x^j}\right|_{x=0}.$$

例 6(遗传马氏链) 设某种生物细胞中有 N 对染色体,其中有一部分是 a 型的,另一部分是 b 型的. 在它不断繁殖后代的过程中,如果上一代的 $2N$ 个染色体中有 i 个 a 型, $2N-i$ 个 b 型,那么下一代每个染色体是 a 型的概率为 $\frac{i}{2N}$,是 b 型的概率为 $\frac{2N-i}{2N}$. 记第 n 代细胞中含 a 型的个数为 $X_n(\omega)$,则 $\{X_n(\omega)\}$ 是一个马氏链. 注意到已知 $X_n(\omega)=i$ 的条件下, $X_{n+1}(\omega)$ 服从二项分布,因而转移概率为

$$P(X_{n+1}(\omega)=j|X_n(\omega)=i)=p_{ij}=C_{2N}^j\left(\frac{i}{2N}\right)^j\left(\frac{2N-i}{2N}\right)^{2N-j}.$$

2. 状态分类

定义 3.1(i 可达 j) 称状态 i 可达 j,如果存在 $n\geqslant 0$,使得

$p_{ij}(n)>0$. 记为 $i\to j$. 称 i 与 j 互通，如果 $i\to j$，且 $j\to i$，记为 $i\leftrightarrow j$. 状态集 $\mathscr{S}$ 的子集 A 称闭集，如果 $\forall\, i\in A$ 有 $\sum\limits_{j\in A}p_{ij}=1$. 如果 $\mathscr{S}$ 不含真的闭子集，则马氏连称为**不可约**.

在本书中，我们约定 i 与 i 自己互通（这一点与其它书不同）.

命题 3.1 "互通"关系是 $\mathscr{S}$ 中的一个等价关系.

证明 因为 $i\leftrightarrow j$ 等价于 $j\leftrightarrow i$，可见互通关系是对称的；又因为 $p_{ii}(0)=1$，故 $i\leftrightarrow j$；此外"互通"关系还是传递的，因为 $i\to j, j\to k$ 时，$\exists\ n_1,n_2$ 使

$$p_{ij}(n_1)>0,\qquad p_{jk}(n_2)>0,$$

于是

$$P_{ik}(n_1+n_2)=\sum_l p_{il}(n_1)p_{lk}(n_2)\geqslant p_{ij}(n_1)p_{jk}(n_2)>0,$$

也就是 $i\to k$. 可见"可达"关系是传递的，因而"互通"关系也是传递的. ▌

由命题 3.1 可见，我们可以把 $\mathscr{S}$ 按"互通"关系分成许多类（子状态类），使其中各类之间不互通，而每类中任何两个状态都互通. 在同类的状态间还有许多共同的性质. 下面我们逐个阐明它们.

定义 3.2 状态 i 称为常返，若

$$P(\omega;\exists\ 1\leqslant n<+\infty,\text{使 } \xi_n=i\,|\,\xi_0=i)=1;$$

否则称 i 为非常返（或**暂态**）.

i 常返的意思就是从 i 出发，有限步内必回到 i. 令

$$\begin{aligned}f_{ij}(n)&\triangleq P_i(\xi.\ \text{在时刻 } n \text{ 首达 } j)\quad (n\geqslant 1)\\&=P_i(\xi_n=j,\xi_k\neq j;0<k<n),\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}f_{ij}^*&\triangleq P_i(\xi.\ \text{在有限时间到达 } j)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}P_i(\xi.\ \text{在 } n \text{ 首达 } j)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}(n).\end{aligned}$$

容易看出

$$P_{ij}(n)=P_i(\xi_n=j)=\sum_{k=1}^{n}P_i(\xi_n=j,\xi.\text{在 }k\text{ 首达 }j)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}P_i(\xi.\text{在 }k\text{ 首达 }j)P(\xi_n=j|\xi_k=j)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}f_{ij}(k)p_{jj}(n-k). \tag{3.1}$$

命题 3.2 以下命题等价：

1) i 是常返的；

2) $\sum_n f_{ii}(n)=1$；

3) $\sum_n p_{ii}(n)=+\infty$.

当 i 非常返时，$\forall\ j$，$\sum_n p_{ji}(n)<+\infty$.

证明 由 $\sum_n f_{ii}(n)=P(\xi.(\omega)\text{在有限步内回到 }i|\xi_0=i)$知 1)与 2)等价. 又由(3.1)，我们有

$$P(z)=1+F(z)P(z),$$

即

$$P(z)=\frac{1}{1-F(z)}, \tag{3.2}$$

其中

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}(n)z^n,\quad F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ii}(n)z^n.$$

由于

$$\sum_n f_{ii}(n)=\lim_{z\uparrow 1}F(z),$$
$$\sum_n p_{ii}(n)=\lim_{z\uparrow 1}P(z),$$

可见(3.2)两边当 $z\uparrow 1$ 时同时有限或无限，因而

$$\sum_n P_{ii}(n)=+\infty,\text{当且仅当}\sum_n f_{ii}(n)=1.$$

又若 i 非常返，有 $\sum_n p_{ii}(n)<+\infty$，$\sum_n f_{ij}(n)\leqslant 1$，由(3.1)

$$\sum_n p_{ji}(n) = \sum_n \sum_{k=1}^n p_{ii}(n-k) f_{ji}(k) = \sum_k f_{ji}(k) \sum_{n \geq k} p_{ii}(n-k)$$

$$= \left(\sum_k f_{ji}(k) \right) \sum_{m=0}^{\infty} p_{ii}(m) < +\infty \quad \left(\sum_n f_{ji}(n) \leq 1 \right). \blacksquare$$

命题 3.3 若 H 是按互通关系(规定 i 与 i 自己互通)所得到的一个等价类,设 $i_0 \in H$,i_0 常返,则 $H = \{i \in \mathscr{S} \mid i \leftrightarrow i_0\}$,$H$ 中一切状态都常返,而且从 H 中的状态出发一定能经有限时间达到 i_0,并永不可到达 H 外的状态(往后这样的状态类称为互通常返类).

证明 由等价类定义,显然 $H = \{i \in \mathscr{S} \mid i \leftrightarrow i_0\}$. 现在证明任何一个常返状态 i 如能到达 j,则 j 一定常返,而且 $j \leftrightarrow i$. 有了这个结论就证明了本命题成立. 事实上,当 i 常返,$i \to j$. 令

$$m_0 = \min\{n \geq 1; p_{ij}(n) > 0\},$$

则对$\forall$ $1 \leq n < m_0$,我们有 $f_{ij}(n) \leq p_{ij}(n) = 0$ 及

$$f_{ij}(m_0) = \sum_{k=1}^{m_0} f_{ij}(k) p_{jj}(m_0 - k) = p_{ij}(m_0) > 0.$$

又由于 i 常返,故

$$\begin{aligned}
0 &= P(\xi_n \neq i; \forall\ n \geq 1 \mid \xi_0 = i) \\
&\geq P(\xi_{k+m_0} \neq i, \xi_{m_0} = j, \xi_n \neq i; \text{对}\forall\ k > 0, 1 \leq n < m_0 \mid \xi_0 = i) \\
&\geq f_{ij}(m_0) P(\xi_{k+m_0} \neq i; \forall\ k > 0 \mid \xi_{m_0} = j, \xi_n \neq i; \forall\ 1 \leq n < m_0) \\
&= f_{ij}(m_0) P(\xi_{k+m_0} \neq i; \forall\ k > 0 \mid \xi_{m_0} = j) \\
&= f_{ij}(m_0) \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} f_{ji}(k) \right).
\end{aligned}$$

那么,$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ji}(k) = 1$. 可见从 j 出发在有限时间能概率为 1 地到达 i. 因此 $i \leftrightarrow j$. 于是,$\exists$ n_1, n_2 使 $p_{ij}(n_1) > 0, p_{ji}(n_2) > 0$,再利用不等式

$$\sum_n p_{jj}(n + n_1 + n_2) \geq \sum_n p_{ji}(n_2) p_{ii}(n) p_{ij}(n_1)$$

$$= p_{ij}(n_1) p_{ji}(n_2) \sum_n p_{ii}(n) = +\infty$$

就知道 j 是常返的. ▌

由上面的命题就知道，按互通关系所分成的等价类中，有一部分是常返状态所组成的类. 从这种常返类出发永远不能到达它以外的状态. 换句话说，一个马氏链一旦到达某个常返类，就必需永远停留在此常返类中，并且将跑遍此常返类中的全部状态. 于是，我们对上述各等价类之间的转移概率可以得到下面的图案：设全体常返类是 $H_1, H_2, \cdots, H_n, \cdots$；将全部非常返类合并为一类，记为 U；若将状态按不同等价关系类排列，转移阵应有以下形式：

$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{P} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} U & H_1 & H_2 & H_3 & \cdots & H_n & \cdots \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} \otimes & \circledast & \circledast & \circledast & \cdots & \circledast & \cdots \\ 0 & \otimes & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \otimes & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \otimes & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \otimes & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ U \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ \vdots \\ H_n \\ \vdots \end{array}$$

其中每一块 0 代表一个全部元素均为 0 的子矩阵；而$\otimes$与$\circledast$代表一块可能不全为 0 的子阵. $\otimes$是子方阵，它本身又是一个随机阵. 如果一个马氏链有两个以上的常返类，它的转移阵一定非不可约.

显见所有状态之间都互通的马氏链为不可约的马氏链.

定义 3.3(周期)　状态 i 称为以 d 为周期，如果当 m 不是 d 的整数倍时 $p_{ii}(m)=0$，而且存在 k_0，使 $k>k_0$ 时，$p_{ii}(kd)>0$. 当 $d=1$ 时又称非周期的. ①

命题 3.4　同一类返类(互通的常返状态)中一切状态都有相同的周期.

证明　设 i 以 d 为周期，$i\leftrightarrow j$，于是存在 $k_0\geqslant 1$，使当 m 不是 d 的倍数时，$p_{ii}(m)=0$；当 $k\geqslant k_0$ 时，$p_{ii}(kd)>0$. 又存在 n_1, n_2 使得

---

① 可以证明：一个常返马氏链的每一个状态都有一个周期 $1\leqslant d<+\infty$.

$p_{ij}(n_1)>0, p_{ji}(n_2)>0$. 设 j 以 t 为周期，即 $p_{jj}(kt)>0(k\geqslant \tilde{k}_0)$. 我们有

$$p_{ii}(n_1+n_2+kt)\geqslant p_{ij}(n_1)p_{jj}(kt)p_{ji}(n_2)>0 \quad (k\geqslant \tilde{k}_0),$$

于是可见，存在 $k_1\geqslant 1$，使(由对称性不妨假定 $\tilde{k}_0\geqslant k_0$)

$$n_1+n_2+\tilde{k}_0 t=k_1 d,$$

$$n_1+n_2+(\tilde{k}_0+1)t=k_2 d \quad (k_2>k_1).$$

可见 $t=(k_2-k_1)d$. 同理可得 $d=(\tilde{k}_2-\tilde{k}_1)t$. 因此，$k_2-k_1=\tilde{k}_2-\tilde{k}_1=1$，即 $t=d$. 此即需证. ▌

3. 调和函数、过份函数与禁忌概率

让我们考虑一个以 $P=(p_{ij})$为转移阵的马氏链 ξ.

定义 3.4(过份函数、调和函数) 设 f 是定义在 $\mathscr{S}$ 上的一个函数(可以取值$+\infty$)，若 f 非负而且

$$\boldsymbol{P}\underline{\boldsymbol{f}}\leqslant \underline{\boldsymbol{f}} \quad \left(\text{即对}\ \forall\, i\in\mathscr{S}\ \text{有}\sum_j p_{ij}f(j)\leqslant f(i)\right),$$

则称 f 是 $\boldsymbol{P}$(或 ξ)的过份函数. 我们称 f 是一个调和函数如果 $\boldsymbol{P}\underline{\boldsymbol{f}}=\underline{\boldsymbol{f}}$(注意 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}\leqslant \boldsymbol{f}$ 蕴含 $\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{f}\leqslant\boldsymbol{f}$)，此处$\underline{\boldsymbol{f}}$为 f 值排成的列矩阵.

定义 3.5(禁忌概率) 设有 $\mathscr{S}$ 的非空真子集 H. 令

$${}_H p_{ij}(n)\triangleq P(\omega;\xi_n(\omega)=j,\xi_k(\omega)\,\overline{\in}\, H;0<k<n\,|\,\xi_0=i).$$

我们称${}_H p_{ij}(n)$为由 i 到 j 的 n 步回避 H 的禁忌转移概率.

事实上，我们前面所定义的 n 步首达概率 $f_{ij}(n)$就是回避 $H=\{j\}$的禁忌概率：$f_{ij}(n)={}_{\{j\}}p_{ij}(n)$.

命题 3.5 令 ${}_H p_{ij}^*\triangleq \sum\limits_{n=0}^{\infty}{}_H p_{ij}(n)$，则对$\forall\ j\rightarrow i_0\in H$，${}_H p_{ij}^*<+\infty(\forall\ i,j\neq i_0)$. 又令

$${}_H\boldsymbol{P}(n)\triangleq({}_H p_{ij}(n))_{i,j\overline{\in} H},\quad {}_H\boldsymbol{P}^*=({}_H p_{ij}^*)_{i,j\overline{\in} H};$$

则

$${}_H\boldsymbol{P}\triangleq{}_H\boldsymbol{P}(1)=(p_{ij})_{i,j\overline{\in} H};\quad {}_H\boldsymbol{P}(n)=({}_H\boldsymbol{P})^n;$$

而且当 $\boldsymbol{P}$ 互通时，我们有

$$(I - {}_HP)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ({}_HP)^n = {}_HP^*, \qquad (3.3)$$

$$\sum_{k \in H} (\delta_{ik} - p_{ik})\, {}_Hp^*_{kj} = p_{ij} \quad (\text{对 } i \in H, j \in H).$$

证明 令

$$\tau \triangleq \inf\{n \geqslant 1; \xi_n = i_0\}, \quad \eta_n \triangleq \xi_{n \wedge \tau}.$$

由于对 $i, j \neq i_0$，我们有

$$\begin{aligned} & P(\eta_{n+m} = j \mid \mathscr{F}_m) \\ &= P(\xi_{n+m} = j, \xi_s \neq i_0; 0 \leqslant s < n+m \mid \mathscr{F}_m) \\ &= P(\xi_{n+m} = j, \xi_s \neq i_0; 0 \leqslant s < n+m \mid \xi_m) \\ &= {}_{\{i_0\}}p_{\xi_m j}(n) 1_{\{\xi_s \neq i_0, s \leqslant m\}} \qquad (3.4) \\ &= 1_{\{\xi_s \neq i_0, 0 \leqslant s \leqslant m\}} P_{\xi_m}(\xi_{n+m} = j, (m < l \leqslant n+m) \xi_l \neq i_0) \\ &= 1_{\{\eta_m \neq i_0\}} P_{\eta_m}(\eta_{n+m} = j). \end{aligned}$$

可见 $\eta = \{\eta_n\}$ 是一个以 $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} {}_{\{i_0\}}P & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为转移阵的马氏链（这样的 ${}_{\{i_0\}}P$ 满足 ${}_{\{i_0\}}P\, \mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}$，称为**准转移阵**）. 另一方面，由 $j \to i_0$，可以知道，当 $j \neq i_0$，

$$P_j(\eta \text{ 在有限时间不返回 } j) \geqslant P_j(\tau < +\infty) = f^*_{ji_0} > 0,$$

于是可见 j 对 η 是非常返状态，而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{p}_{ij}(n) < +\infty. \qquad (3.5)$$

再注意到：对 $i_0 \in H$，应有

$$\begin{aligned} {}_Hp_{ij}(n) &= P_i(\xi_n = j, \xi_s \in H; 0 < s < n) \\ &\leqslant P_i(\xi_n = j, \xi_s \neq i_0; 0 < s < n) \\ &= {}_{\{i_0\}}p_{ij}(n) = \widetilde{p}_{ij}(n), \end{aligned}$$

综合(3.4)与(3.5)就得到：对一切 $j \neq i_0$，$j \to i_0 \in H$，

$${}_Hp^*_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_Hp_{ij}(n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{p}_{ij}(n) < +\infty.$$

特别地，当 P 互通，一切 $j \to H$，因而

$$ {}_H p_{ij}^* = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H p_{ij}(n) < +\infty, $$

而且

$$ (I - {}_H P)\, {}_H P^* = (I - {}_H P) \sum_{n=0}^{\infty} {}_H P^n = I $$

$$ = \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}_H P^n \right) (I - {}_H P) = {}_H P^* (I - {}_H P), $$

即
$$ (I - {}_H P)^{-1} = {}_H P^* = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H P^n. $$

又由于对 $j \in H, k \neq j$,

$$ {}_H p_{kj}^* = \sum_{n=1}^{\infty} {}_H p_{kj}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H p_{kj}(n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s \in H} {}_H p_{ks}(n) p_{sj} $$

$$ = \sum_{s \in H} {}_H p_{ks}^* p_{sj}, $$

再将此代入(3.3)式，就得到

$$ \sum_{k \in H} (\delta_{ik} - p_{ik})\, {}_H p_{kj}^* = \sum_{s \in H} \delta_{is} p_{sj} = p_{ij}. \ \blacksquare $$

定理 3.6 设 P 不可约，则 P 常返当且仅当 P 的一切过份函数都是常数.

证明 1) 设 P 非常返. 由命题 3.5，取 $H \neq \{j\}$，应有

$$ \sum_{k \neq j} p_{ik}\, {}_H p_{kj}^* + p_{ij} = {}_H p_{ij}^* \quad ({}_H p_{ij}^* = f_{ij}^*). $$

于是令 $f(i) = f_{ij}^* (i \neq j), f(j) = 1$，我们得到

$$ \sum_k p_{ik} f(k) = f_{ij}^* \leqslant f(i). $$

可见 f 是一个过份函数. 事实上 f 一定不是常数(假设不然，即 $f_{ij}^* = 1 (i \neq j)$，就得到以下矛盾：

$$ 1 > f_{jj}^* = \sum_{i \neq j} p_{ji} f_{ij}^* + p_{jj} = \sum_i p_{ji} = 1). $$

2) 设 P 常返. 如果存在过份函数 f 使 $f(j) = +\infty$，那么由于

P 不可约，存在 n_0，使 $p_{ij}(n_0)>0$，因而

$$f(i) \geqslant \sum_k p_{jk}(n_0) f(k) = +\infty,$$

即
$$f(i) \equiv +\infty,$$

因此我们只需考虑 f 只取有限值的情况. 令 ξ 是以 P 为转移阵的马氏链，

$$\eta_n \triangleq f(\xi_n), \quad \mathscr{F}_n = \sigma(\xi_s; s \leqslant n);$$

于是

$$E(f(\xi_{n+1}) | \mathscr{F}_n) = E(f(\xi_{n+1}) | \xi_n) = \sum_k p_{\xi_n k} f(k) \leqslant f(\xi_n).$$

可见 $\{\eta_n, \mathscr{F}_n\}$ 是非负上鞅，因而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = \varphi(\omega)$ 一定 a.e. 存在. 另一方面，由于 P 常返不可约，我们有

$$P_i(\xi_n = j, \text{i.o.}) = P_i(\xi_n = k, \text{ i.o.}) = 1 \quad (\forall\, k, j)$$

(i.o. 表示发生∞次). 因此，

$$P_i(f(\xi_n) = f(j), \text{i.o.}) = P_i(f(\xi_n) = f(k), \text{i.o.}) = 1,$$

即

$$P_i(f(k) = f(j) = \varphi(\omega)) = 1,$$

可见 $f(j)$ 与 j 无关. ▎

推论 1 当 P 不可约，则它是非常返的当且仅当方程

$$\sum_k p_{ik} y_k = y_i \quad (i \neq j) \tag{3.6}$$

(对某个 j)有非常数有界解.

证明 1) 事实上，在定理 3.6 的证明中已给出非常返时(3.6)的一个有界非常数解.

2) 现往证(3.6)有非常数有界解时，P 必非常返. 设不然，即 P 常返而(3.6)有非常数有界解 $\{y_i; i \in \mathscr{S}\}$. 由于常函数一定是(3.6)的解，所以不妨设 $y_i \geqslant 0$(因为 $\{y_i - \inf\limits_k y_k \geqslant 0\}$ 就是(3.6)的一个非负有界非常数解). 令

$$a = y_j - \sum_k p_{jk} y_k, \quad c = \sup_k y_k > \inf_k y_k \geqslant 0.$$

若 $\alpha\geqslant 0$，那么$\{f(i)=y_i\}$就是 P 的一个过份函数，由常返性得到$\{y_k\}$是常数与所设矛盾. 但是 $\alpha<0$ 也不可能，因为重复用(3.6) n 次得到

$$c \geqslant \sum_k p_{jk}(n)y_k = y_j - \alpha\sum_{m=1}^{n-1}p_{jj}(m) \to +\infty.$$

可见 P 不可能常返. ▌

§2 弱遍历定理与不变测度

1. 弱遍历定理

定理 3.7(弱遍历定理) 设 ξ 是一个马氏链，它的转移阵是 P，令

$$L^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^k \quad (L^{(n)} = (L_{ij}(n))).$$

则极限

$$\lim_{n\to\infty}L^{(n)} = L \geqslant 0 \ (L = (L_{ij}))$$

存在，而且满足方程

$$PL = LP = L = L^2.$$

证明 由于

$$0 \leqslant L_{ij}(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p_{ij}(k) \leqslant 1,$$

可见存在子列 $n_k(i,j)\to\infty$，使

$$L_{ij}(n_k(i,j)) \to L_{ij} \quad (k\to+\infty).$$

于是，可由对角线抽子列法得到 n_k，使得$\forall\ i,j$

$$L_{ij}(n_k) \to L_{ij} \quad (k\to+\infty),$$

即

$$L^{(n_k)} \to L.$$

另一方面，由于

$$L^{(n)}P = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^kP = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}PP^k$$

$$= PL^{(n)} = L^{(n)} + \frac{1}{n}(P^n - I),$$

其中 I 是单位阵. 可见

$$\lim_{k\to\infty} L^{(n_k)} P = L = \lim_{k\to\infty} PL^{(n_k)}.$$

又由于 $\sum_j p_{ij}(n) = 1$, $0 \leqslant L_{ij} \leqslant 1$, 用有界收敛定理, 就得到 $L = PL$. 再用 Fatou 引理得

$$LP = (\lim_{k\to\infty} L^{(n_k)})P \leqslant \lim_{k\to\infty} L^{(n_k)} P = \lim_{k\to\infty} PL^{(n_k)} = PL = L. \qquad (3.7)$$

另外, 由

$$LP\mathbf{1} = L\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}\ (\mathbf{1}\text{ 为元素全为 1 的列向量}), \qquad (3.8)$$

可见 $\sum_j (L_{ij} - (LP)_{ij}) = 0$, 于是再利用(3.7), 即 $L_{ij} - (LP)_{ij} \geqslant 0$, 就有 $L_{ij} = (LP)_{ij}$, 即 $L = LP$. 进而, 我们又可得到

$$L = \frac{1}{n_k} \sum_{l=0}^{k-1} LP^l = LL^{(n_k)} = L^{(n_k)} L. \qquad (3.9)$$

再由(3.9)用有界收敛定理得

$$L = \lim_{k\to\infty} LL^{(n_k)} = LL = L^2.$$

最后我们来证明 $\lim_{n\to\infty} L^{(n)} = L$. 设 $m_k \to \infty$ 是一个子列, 使 $\lim_{k\to\infty} L^{(m_k)} = \overline{L}$, 那么由 $L = LP$ 和有界收敛定理得

$$L = \lim_{k\to\infty} LL^{(m_k)} = L\overline{L}.$$

又由于 L 和 $\overline{L}$ 是平等的, 可知 $\overline{L} = \overline{L}L$. 再由 Fatou 引理及(3.9), 我们有

$$\overline{L}L = (\lim_{k\to\infty} L^{(m_k)})L \leqslant \lim_{k\to\infty} (L^{(m_k)} L) = L.$$

同理, $L\overline{L} \leqslant \overline{L}$. 于是

$$\overline{L} = \overline{L}L \leqslant L = L\overline{L} \leqslant \overline{L}.$$

即 $\overline{L} = \overline{L}L = L\overline{L} = L$. 这就证明了任意子列 m_k, $L^{(m_k)}$ 有相同的极限 L. ▌

定义 3.6(不变测度) 设 $\underline{\pi} = (\pi_1, \cdots, \pi_k, \cdots)$ 使得

$$\sum_i \pi_i p_{ij} = \pi_j,\ \ \pi_j \geqslant 0\ \ (\forall\ j),\ \ \pi_j\ \text{不全为零},$$

则称$\underset{\sim}{\pi}$是 $\boldsymbol{P}$ 的一个不变测度. 又若 $\sum_i \pi_i = 1$, 则称之为不变概率测度.

命题 3.8 若$\underset{\sim}{\pi}$是 $\boldsymbol{P}$ 的不变测度,则$\underset{\sim}{\pi}\boldsymbol{P}^n=\underset{\sim}{\pi}$ ($\forall\ n\geqslant 0$).

以 $\boldsymbol{P}$ 为转移阵的马氏链 ξ 是平稳的当且仅当它的初分布$\underset{\sim}{\mu}$是一个不变测度.

证明 由定义$\underset{\sim}{\pi}\boldsymbol{P}=\underset{\sim}{\pi}$,于是$\underset{\sim}{\pi}\boldsymbol{P}^n=\underset{\sim}{\pi}\boldsymbol{P}^{n-1}=\cdots=\underset{\sim}{\pi}$.

设初分布$\underset{\sim}{\mu}$是不变测度,则 $P(\xi_n = j) = \sum_i \mu_i p_{ij}(n) = \mu_j$ 与 n 无关,从而得到

$$\begin{aligned}
&P(\xi_{t_1}= i_1,\cdots,\xi_{t_n} = i_n) \\
&\quad = P(\xi_{t_1} = i_1)p_{i_1i_2}(t_2 - t_1)p_{i_2i_3}(t_3 - t_2)\cdots \\
&\qquad \times p_{i_{n-1}i_n}(t_n - t_{n-1}) \\
&\quad = P(\xi_{t_1+\tau} = i_1)p_{i_1i_2}(t_2 + \tau - (t_1 + \tau))\cdots \\
&\qquad \times p_{i_{n-1}i_n}(t_n + \tau - (t_n + \tau)) \\
&\quad = P(\xi_{t_1+\tau} = i_1,\xi_{t_2+\tau} = i_2,\cdots,\xi_{t_n+\tau} = i_n),
\end{aligned}$$

即 ξ 是平稳的.

反之,当 ξ 平稳,显然

$$P(\xi_n = i) = \mu_i\quad (\forall\ n),$$

于是 $$\mu_i = P(\xi_1 = i) = \sum_k P(\xi_0 = k)p_{ki} = \sum_k \mu_k p_{ki},$$

即$\underset{\sim}{\mu}$是不变测度. ▌

注:由定理 3.7,显然 $\boldsymbol{L}$ 的任何非零的一行都是不变测度.

定理 3.9 设 ξ 是一个不可约马氏链,且常返,转移阵为 $\boldsymbol{P}$,则

1) $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{1}\,\underset{\sim}{\pi}$(一列矩阵乘一行矩阵).

2) $\pi_i(i=1,2,\cdots)$或者全为 0,或者全不为 0.

3) $\boldsymbol{P}$ 的不变概率测度存在,当且仅当$\underset{\sim}{\pi}$不为 0. 这时$\underset{\sim}{\pi}$是 $\boldsymbol{P}$ 的

唯一不变概率测度.

证明 1）由于 $L_{ij}\geqslant 0$ 与 $\boldsymbol{PL}=\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{L}$ 的每一列都是一个过份函数. 又由于 ξ 是不可约的常返马氏链，$\boldsymbol{L}$ 的每一列都应是常函数，即 $\boldsymbol{L}$ 的每行都相同：

$$L_{jk}=L_{kk}.$$

令 $\pi_k=L_{kk}$，就得到 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{1}\,\underset{\sim}{\pi}$.

2）设 $\pi_i=0$，即 $L_{ii}=0$. 由于任意 i,j 都互通，必存在 M,N 使得 $p_{ij}(M)p_{ji}(N)>0$. 再注意到

$$p_{ii}(n+M+N)\geqslant p_{ij}(M)p_{jj}(n)p_{ji}(N),$$

就得到

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p_{ii}(k+M+N)\geqslant p_{ij}(M)p_{ji}(N)\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p_{jj}(k).$$

令 $n\to+\infty$，就得到

$$0=\pi_i=L_{ii}\geqslant L_{jj}p_{ij}(M)p_{ji}(N)\geqslant 0,$$

即$\forall\ j$，$\pi_i=L_{ii}=L_{jj}=\pi_j=0$.

3）设$\underset{\sim}{\pi}$不为 0，显然$\underset{\sim}{\pi}\boldsymbol{P}=\underset{\sim}{\pi}$，而且

$$\boldsymbol{1}\,\underset{\sim}{\pi}=\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}^2=(\boldsymbol{1}\,\underset{\sim}{\pi})(\boldsymbol{1}\,\underset{\sim}{\pi}),$$

可见 $\pi_i\sum_j\pi_j=\pi_i$. 因而$\sum_j\pi_j=1$，于是$\underset{\sim}{\pi}$是 $\boldsymbol{P}$ 的一个不变概率测度. 现在证明不变测度唯一. 设$\underset{\sim}{\rho}$也是 $\boldsymbol{P}$ 的不变概率测度，则

$$\underset{\sim}{\rho}\boldsymbol{1}=1,\ \underset{\sim}{\rho}\boldsymbol{P}=\underset{\sim}{\rho},$$

因而

$$\underset{\sim}{\rho}\boldsymbol{P}^n=\underset{\sim}{\rho},\ \underset{\sim}{\rho}\boldsymbol{L}^{(n)}=\underset{\sim}{\rho}.$$

从而由有界收敛定理

$$\underset{\sim}{\rho}\boldsymbol{L}=\underset{\sim}{\rho},\ \underset{\sim}{\rho}=\underset{\sim}{\rho}\boldsymbol{L}=\underset{\sim}{\rho}\boldsymbol{1}\,\underset{\sim}{\pi}=\underset{\sim}{\pi}.$$

于是唯一性得证. 另一方面，若 $\boldsymbol{P}$ 存在不变概率测度$\underset{\sim}{\rho}$，由上所述$\underset{\sim}{\rho}=\underset{\sim}{\pi}$，于是$\underset{\sim}{\pi}\neq 0$. ▌

推论 1 设 $\boldsymbol{P}$ 是马氏链 ξ 的转移阵，则极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^k$$

存在，记为 L，而且 L 具有以下形式：

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \quad U & H_1 & H_2 & \cdots & H_n & \cdots \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & (f_{ij}^*(\underset{\sim}{\pi}_1)_j) & (f_{ij}^*(\underset{\sim}{\pi}_2)_j) & \cdots & (f_{ij}^*(\underset{\sim}{\pi}_n)_j) & \cdots \\ 0 & \mathbf{1}\,\underset{\sim}{\pi}_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mathbf{1}\,\underset{\sim}{\pi}_2 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1}\,\underset{\sim}{\pi}_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \begin{matrix} U \\ H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \\ \vdots \end{matrix} \end{array}$$

其中 $f_{ij}^* = \sum_m f_{ij}(m)$，$(\underset{\sim}{\pi}_k)_j$ 表示矩阵 $\underset{\sim}{\pi}_k$ 的第 j 列元素，每个 $\underset{\sim}{\pi}_k$ 的元素或全为 0 或全不为 0($\forall\, k$).

证明 1) 若 $j\in U$(非常返类)，则

$$\sum_n p_{jj}(n) < +\infty.$$

所以 $p_{jj}(n)\to 0(n\to\infty)$，于是

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= \sum_{m=0}^{n} f_{ij}(m)p_{jj}(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^{n} f_{ij}(m)1_{(m\leqslant n)}\ p_{jj}(n-m)\to 0\quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

2) 对 $i,j\in H_k$，可以将马氏链限制在 H_k 中得到一新马氏链 X 使得

$$\begin{aligned} &P(X_{n+m}=j\,|\,X_n=i) \\ &\qquad = P(\xi_{n+m}=j\,|\,\xi_n=i)\quad (\forall\, i,j\in H_k), \end{aligned}$$

对 X 用定理 3.9 就得到 $\underset{\sim}{\pi}_k$ 使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}p_{ij}(l) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}P(X_l=j\,|\,X_0=i) = (\mathbf{1}\,\underset{\sim}{\pi}_k)_{ij}.$$

3) 对常返状态 $i\overline{\in} H_k$ 及 $j\in H_k$，$p_{ij}(n)\equiv 0(\forall\, n)$，于是 $L_{ij}=$

0.

4) 对 $i\in U, j\in H_k$,由于

$$p_{ij}(n)=\sum_{k=0}^{n}f_{ij}(k)p_{jj}(n-k),$$

可见

$$L_{ij}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}f_{ij}(k)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-k-1}p_{jj}(k)$$

$$=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}f_{ij}(k)\Big)L_{jj}=f_{ij}^{*}L_{jj}\quad(L_{jj}=(\pi_k)_j).\ ▌$$

定义 3.7(正常返) 状态 i 称为正常返的,如果 $L_{ii}>0$;i 称为零常返的,如果 i 常返而且 $L_{ii}=0$.

推论 2 i 是正常返的,则它所在的常返类 H_k 中全部状态都是正常返的,即正常返性是整个互通类的性质.

2. 不变概率测度

命题 3.10 $\boldsymbol{P}$ 的不变概率测度存在当且仅当它至少有一个正常返类. 这时它的任一概率不变测度在非正常返类上的测度都是 0,而且必定是$\pi_l(l=1,2,\cdots)$的凸线性组合,其中π_l 为集中在正常返类 H_l 上的唯一不变概率测度. 反之也正确.

证明 1) 显然每一个π_l 是一个不变测度,因而它们的凸线性组合仍是一个不变测度.

2) 当 $\boldsymbol{P}$ 的不变概率测度存在,设μ为其中之一,则

$$\mu\boldsymbol{P}^n=\mu,\quad \mu\boldsymbol{L}(n)=\mu.$$

由控制收敛定理得到

$$\mu\boldsymbol{L}=\mu.$$

设 j 为非常返,或零常返状态,则 $\boldsymbol{L}$ 的第 j 列全为 0,从而

$$\mu_j=\sum_k\mu_kL_{kj}=0.$$

可见若 $\boldsymbol{P}$ 无正常返状态,则 $\mu_j=0(\forall\ j\in\mathscr{S})$,这与$\mu$是概率测度矛

盾，因而若不变概率测度存在，则 P 至少有一个正常返类. 而且这时对 $j\in H_k$，

$$\mu_j=\sum_i \mu_i L_{ij}=\sum_{i\in H_k}\mu_i \pi_j=\pi_j\Big(\sum_{i\in H_k}\mu_i\Big).$$

由此取 $\sum_{i\in H_k}\mu_i$ 为 $\underset{\sim}{\pi}_k$ 的系数，$\underset{\sim}{\mu}$ 是 $\underset{\sim}{\pi}_k$ 的凸线性组合. ∎

例 7(Ehrenfest 扩散模型链) 本世纪初，在统计热力学的研究中曾经发生一个使人迷惑的问题：从 Boltzmann 的研究出发，一方面，一个保守系统应该无穷多次地回到初始状态的任意小邻域(在状态空间离散时，就是无穷多次回到初始状态)；另一方面，实验和热力学说明从任何初始分布出发，系统总应不可逆地趋于平衡. 表面上看起来，二者是矛盾的. Ehrenfest 给出了下面这样一个马氏链模型来澄清概念：设有 $2N+1$ 个粒子放在甲、乙两容器中，若每次从这 $2N+1$ 个粒子中随机地选一个，使它改换放置的容器，记 X_n 为第 n 次挪动后甲容器所有的粒子数，显然 $\{X_n\}$ 是一个马氏链，而且对 $0\leqslant i,j\leqslant 2N+1$

$$p_{ij}=P(X_{n+1}=j|X_n=i)$$

$$=\begin{cases}1, & i=0,j=1;\text{或 } i=2N+1,j=2N \text{ 时};\\ \dfrac{i}{2N+1}, & j=i-1,i>0 \text{ 时};\\ 1-\dfrac{i}{2N+1}, & j=i+1,i<2N+1 \text{ 时};\\ 0, & \text{其它情况}.\end{cases}$$

显然这是一个不可约的马氏链，周期为 2，方程

$$\begin{cases}\underset{\sim}{x}\boldsymbol{P}=\underset{\sim}{x},\\ x_i>0,\ \underset{\sim}{x}\mathbf{1}=1\end{cases}$$

有解：$\pi_i=C_{2N+1}^i 2^{-(2N+1)}>0$，可见 P 正常返. 在下面一节，我们还将证明对 $P_i(\ )\equiv P(\ |X_0=i)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}P_i(X_{2n}=j)=2\pi_j=C_{2N+1}^j 2^{-2N}\quad (j-i \text{ 为偶数时}),$$

在 $j-i=$奇数时，这个极限为 0. 我们还将看到，在前 n 步中甲容器恰有 j 个粒子的平均次数

$$v_j(n)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}1_{\{j\}}(X_k)\to\pi_j.$$

也就是说无论初分布如何，只要时间（挪动次数）充分大，对时间平均地看，在偶数步挪动后甲、乙两容器的粒子分布和随机地将 $2N+1$ 个粒子放入两容器而得的分布几乎相同.

从这个例子可以看出常返性和趋于平衡 $(\lim\limits_{n\to\infty}P(X_{2n}=j)=\pi_j)$ 并不矛盾，前者是一个微观特性，后者是宏观的统计性质，它反映的是微观现象的平均值.

人们会问，如果此模型是接近事实的，那么为什么在实验中从未看到分子从集中在容器左半部分出发的分子回到左半部分呢？从本段最后的讨论，我们将看到这个回访时间的平均值是一个天文数字，所以在我们的历史中实际上是看不到这种回访的.

§3 强马氏过程、强遍历性与平均回访时间

1. 强马氏性的概念

考虑取值于 $(\mathscr{S},\Sigma)$ 中的时齐马氏过程 $\xi=\{\xi_t,\mathscr{F}_t;t\in T\}$，$(T=R^+$ 或 $Z^+)$，设其转移概率族为

$$\{p(t;x,A)\triangleq p(0,x;t,A)=p(s,x;s+t,A);$$
$$t\in T,x\in\mathscr{S},A\in\Sigma\}.$$

定义 3.8（强马氏性） 时齐马氏过程 ξ 称为具有强马氏性，如果对 $\forall\ t>0,A\in\Sigma$ 及关于 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的停时 τ，都有下式成立

$$E(1_A(\xi_{t+\tau})|\mathscr{F}_\tau)=p(t;\xi_\tau,A)\quad 对\ \text{a.e.}\ \omega\in\{\omega;\tau(\omega)<+\infty\}.$$

强马氏性是比马氏性更强的性质，直观地说，就是在考虑马氏性时，“现在”的时刻 t 是一个 T 中的数；而在强马氏性中，“现在”的时刻 τ 可以是任意停时. 强马氏性可以使许多计算大大简化，可

以得到许多好结果，因而考虑马氏过程，常常希望它能具有强马氏性. 于是研究什么样的马氏过程具有强马氏性变得非常重要. 时间参数离散的马氏过程都有强马氏性，但一般时间参数的马氏过程并不一定具有强马氏性，第五章中我们将对此给出反例.

命题 3.11 任何时间参数离散的时齐马氏过程都具有强马氏性，即在$\{\tau<\infty\}$上 a.e. 有

$$P(\xi_{t+\tau}\in A|\mathscr{F}_\tau)=p(t;\xi_\tau,A).$$

证明 对$\forall A\in\Sigma,t\in T$，停时$\tau$及$B\in\mathscr{F}_\tau$，我们有

$$\begin{aligned}
&P(\xi_{t+\tau}\in A,\tau<+\infty,B)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}P(\xi_{t+k}\in A,B,\tau=k)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}E(B\cap\{\tau=k\}P(\xi_{t+k}\in A|\mathscr{F}_k))\\
&\quad(B\cap\{\tau=k\}\in\mathscr{F}_k)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}E(B\cap\{\tau=k\}p(t;\xi_k,A))\\
&=P(B,\tau<+\infty,p(t;\xi_\tau,A)).
\end{aligned}$$

可见，

$$P(\xi_{t+\tau}\in A|\mathscr{F}_\tau)1_{\{\tau<+\infty\}}(\omega)=p(t;\xi_\tau,A)1_{\{\tau<+\infty\}}. \blacksquare$$

推论 以$P=(p_{ij})$为转移阵的离散时间参数马氏链ξ具有强马氏性，而且

$$E(\xi_{t+\tau}=j|\mathscr{F}_\tau)1_{\{\tau<\infty\}}=p_{\xi_\tau j}(t)1_{\{\tau<\infty\}}.$$

2. 平均回访时间

现在让我们利用强马氏性来讨论回访时间间隔. 令

$$t_0=0,$$

$$t_n=\min\{t>t_{n-1};\xi_t(\omega)=i\}>t_{n-1}>\cdots>0,$$

再令

$$\tau_n = t_{n+1} - t_n \quad (n = 0,1,2,\cdots).$$

由于$\{\omega; t_n(\omega)=k\}=\{\omega;(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)$中恰有 n 次为 i，$\{\xi_k=i\}\in \mathscr{F}_k$，$t_n$ 是$\{\mathscr{F}_n\}$的停时. 再由命题 3.11 的推论，我们得到：对 $t>s$，

$$P(\xi_{t_n+t} = j \mid \mathscr{F}_{t_n+s}) = p_{\xi_{t_n+s},j}(t-s) = P(\xi_{t_n+t} = j \mid \xi_{t_n+s}).$$

特别地，由 $\xi_{t_n}=i$

$$P(\xi_{t_n+t} = j \mid \mathscr{F}_{t_n}) = p_{\xi_{t_n},j}(t) = P(\xi_{t_n+t} = j \mid \xi_{t_n}) = p_{ij}(t),$$

也即 $\xi^{(n)}\triangleq\{\xi_{t_n+t},\mathscr{F}_{t_n+t}; t=0,1,\cdots\}$仍是一个马氏链，而且与 $\mathscr{F}_{t_n}$ 独立，与 ξ 具有相同的转移阵，$\xi_0^{(n)}=\xi_{t_n}=i$. 由于

$$\tau_{n-1} = t_n - t_{n-1},\cdots,\tau_1 = t_2 - t_1 \in \mathscr{F}_{t_n}, \tau_n \in \sigma(\xi^{(n)}),$$

上述结论就告诉我们，τ_n 与$\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_{n-1}\}$独立，而且 $\tau_n(n\geqslant 1)$具有同分布，也即$\{\tau_n; n\geqslant 1\}$是独立同分布序列. 此外，容易看出

$$P(\tau_0 = k \mid \xi_0 = j) = f_{ji}(k),$$

$$P(\tau_n = k \mid \xi_0^{(n)}) = P(\tau_n = k \mid \mathscr{F}_{t_n}) = f_{ii}(k) \quad (n \geqslant 1).$$

从而

$$E_j(\tau_0) = \begin{cases} +\infty, & \text{当 } P_j(\tau_0 = +\infty) > 0; \\ \sum_{k=1}^{\infty} k f_{ji}(k), & \text{当 } P_j(\tau_0 < +\infty) = 1. \end{cases}$$

这里 $P_j(\ )\equiv P(\ \mid \xi_0=j)$，$E_j(\ )\equiv E(\ \mid \xi_0=j)$. 将 $E_i(\tau_n)(n\geqslant 1)$记为 μ_i，μ_i 是从 i 出发首次回到 i 的平均时间. 容易看出，

$$P_i(\tau_n < +\infty) = P_i(\tau_0 < +\infty) = \sum_k P_i(\tau_0 = k)$$

$$= \sum_k f_{ii}(k) = f_{ii}^*.$$

因而，i 常返的充要条件是

$$P(\tau_n < +\infty) = 1 \quad (n \geqslant 1).$$

命题 3.12 $\mu_i<+\infty$当且仅当 i 是正常返的. 这时

$$\pi_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ii}(k) = \frac{1}{\mu_i}.$$

证明 由于 $P(\tau_n<+\infty)=f_{ii}^*$，当 i 非常返时，$\mu_i=+\infty$. 因而

当 $\mu_i<+\infty$，i 必常返，即

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}(k) = f_{ii}^{*} = 1.$$

令
$$r_{ii}(n) \triangleq \sum_{k=n}^{\infty} f_{ii}(k),$$

这时
$$r_{ii}(1) = 1,\ P(\tau_n <+\infty) = 1,$$

$$+\infty > \mu_i = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{ii}(k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} f_{ii}(k) = \sum_{n=1} r_{ii}(n). \tag{3.10}$$

又由于

$$\begin{aligned}
p_{ii}(n) &= \sum_{k=1}^{n} f_{ii}(k) p_{ii}(n-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (r_{ii}(k) - r_{ii}(k+1)) p_{ii}(n-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} r_{ii}(k) p_{ii}(n-k) - \sum_{k=2}^{n+1} r_{ii}(k) p_{ii}(n-k+1).
\end{aligned}$$

显然有

$$u_n \triangleq \sum_{k=1}^{n} r_{ii}(k) p_{ii}(n-k) = \sum_{k=1}^{n+1} r_{ii}(k) p_{ii}(n+1-k) = u_{n+1},$$

于是

$$u_n = u_{n-1} = \cdots = u_1 = r_{ii}(1) p_{ii}(0) = 1.$$

另一方面

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u_n = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} r_{ii}(k) p_{ii}(n-k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} r_{ii}(k) 1_{\{k\leqslant N\}}(k) \frac{1}{N}\sum_{n=k}^{N} p_{ii}(n-k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} r_{ii}(k) 1_{\{k\leqslant N\}}(k) \left(\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} p_{ii}(m) - \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{k-1} p_{ii}(N\text{-}m)\right)
\end{aligned}$$

$$\to \sum_{k=1}^{\infty} r_{ii}(k) L_{ii} = \mu_i L_{ii} = \pi_i \mu_i,$$

因而
$$\pi_i = \frac{1}{\mu_i} > 0.$$

从而得到 i 正常返.

反之,当 $\pi_i > 0$(正常返),利用 Fatou 引理,由(3.10)

$$\mu_i = \sum_{k=1}^{\infty} r_{ii}(k) = \frac{1}{\pi_i} \sum_{k=1}^{\infty} r_{ii}(k) \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k} p_{ii}(n) 1_{\{k\leq N\}}(k)$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi_i} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N} \sum_{m=k}^{N} r_{ii}(k) p_{ii}(m-k) 1_{\{k\leq N\}}(k)$$

$$= \frac{1}{\pi_i} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} r_{ii}(k) p_{ii}(m-k)$$

$$= \frac{1}{\pi_i} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} u_m = \frac{1}{\pi_i}. \quad \blacksquare$$

对于例 7 的情形,对于状态 $i=0$ 的回访时间为$\frac{1}{\mu_0}=2^{2N+1}$,它是一个天文数字,因为 $N\approx 10^{23}$.

注:命题 3.12 亦可由下面的强遍历定理得到.

3. 强遍历定理

定理 3.13 设 $\boldsymbol{P}$ 是一个不可约正常返马氏链 ξ 的转移阵,g 是 ξ 的状态空间 $\mathscr{S}$ 上的有界函数(设 $|g(i)|\leqslant C$),则 a.e. 地有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) = \sum_{i\in\mathscr{S}} \pi_i g(i). \tag{3.11}$$

其中 $$\pi_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_{ii}(k) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n)\Big)^{-1} = \frac{1}{\mu_i}.$$

特别,当 $g(x)=1_{\{i\}}(x)$时,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{i\}}(\xi_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(\omega)}{n} = \pi_i = \frac{1}{\mu_i}, \tag{3.12}$$

其中 $N_n(\omega)$是在$\{0,1,\cdots,n-1\}$这 n 个时刻中 ξ 取值为 i 的次数,

$$\mu_i = E_i(\tau_0) \quad (\text{如 2 段开始的讨论}).$$

证明 先证明(3.12)式，即 $g(x)=1_{\{i\}}(x)$这一特殊情况。注意到$\{\tau_n;n\geqslant 1\}$是独立同分布序列，由强大数律就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_k = E\tau_m = \mu_i \quad (m\geqslant 1)(\text{a.e.}).$$

若 $N_n(\omega)\to+\infty(\text{a.e.})$，就立即可以得到

$$\frac{1}{\mu_i} = \lim_{n\to\infty}\frac{N_n(\omega)}{\sum\limits_{k=0}^{N_n(\omega)}\tau_k} = \lim_{n\to\infty}\frac{N_n(\omega)}{t_{N_n+1}(\omega)}.$$

而事实上，若 $N_\infty(\omega)\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}N_n(\omega)=k$，则由 $t_k(\omega)<+\infty(\text{a.e.})$，有 $\xi_{t_k+n}(\omega)\neq i(\forall\ n>0)$，于是

$$\begin{aligned}P(N_\infty(\omega)=k)&\leqslant P(t_k(\omega)<+\infty,\xi_{t_k+n}(\omega)\neq i;\forall\ n>0)\\&\leqslant E(P(\xi_{t_k+n}\neq i,\forall\ n\mid\xi_{t_k}))\\&\leqslant 1-f_{ii}^{*}=0.\end{aligned}$$

由此可见

$$P(N_\infty(\omega)<+\infty)=0.$$

另一方面，注意到

$$\frac{N_n(\omega)}{t_{N_n(\omega)+1}(\omega)}\leqslant\frac{N_n(\omega)}{n}\leqslant\frac{N_n(\omega))}{t_{N_n(\omega)}(\omega)}=\frac{N_n(\omega)}{\sum\limits_{k=0}^{N_n(\omega)-1}\tau_k},$$

以及 $\tau_0(\omega)=t_1(\omega)<+\infty(\text{a.e.})$，我们立即得出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1_{\{i\}}(\xi_k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N_n(\omega)=\frac{1}{\mu_i}=\pi_i$$

$\left(\text{当 }\mu_i=+\infty,\frac{1}{\mu_i}\text{理解为 }0\right)$.

对任意一个有界函数 g，不妨设它非负，而且

$$g(\xi_n)=\sum_i g(i)1_{\{i\}}(\xi_n).$$

由于 $\sum\limits_i\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}1_{\{i\}}(\xi_n)=1$，因此$\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}1_{\{i\}}(\xi_n)$ 作为在 $\boldsymbol{Z}^+$ 上的测

度全收敛到测度π. 我们就立即得到

$$\sum_i g(i)\pi_i = \lim_{N\to+\infty} \sum_i g(i) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1_{\{i\}}(\xi_n),$$

也即

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(\xi_n) = \sum_i g(i)\pi_i \quad (\text{a.e.}). ▍$$

推论 当ξ是不可约平稳马氏链时,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(\xi_n) = E(g(\xi_n)) \quad (\text{a.e.}). \tag{3.13}$$

证明 由定理 3.9 与命题 3.12,$\underline{\pi}$是P的唯一不变概率测度,因而平稳马氏链的初分布:$P(\xi_0=i)=\pi_i$,从而

$$E(g(\xi_n)) = \sum_i g(i)\pi_i,$$

于是(3.11)就化为(3.13). ▍

定理 3.14 设$\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n;n\geqslant 0\}$是以$\underline{\mu}$为初分布,$P$为转移阵的平稳马氏链,则以下条件等价:

1) $\underline{\mu}$只在一个正常返类H上有测度;

2) (3.13)成立;

3) 令

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_I \triangleq \sigma\{f \in \mathscr{F}_\infty;\ & f\text{有界,且} \\
& f = f(\xi_0,\xi_1,\cdots) = f(\xi_k,\xi_{k+1},\cdots), \\
& \text{对}\forall\ \text{固定的}k\geqslant 1\ \text{a.e.成立}\} \\
= \{A \in \mathscr{F}_\infty: 1_A(\omega) & \triangleq \varphi(\xi_0,\cdots,\xi_n\cdots) \\
& = \varphi(\xi_k,\cdots,\xi_{k+n},\cdots)(\forall k\geqslant 1)\ \text{a.e.成立}\},
\end{aligned}$$

则$\mathscr{F}_I$中仅含测度为0或1的集合.

证明 1)$\Longrightarrow$2). 因为初分布$\underline{\mu}$只在H上有测度,所以$P(\xi_n \overline{\in} H)=0(\forall\ n)$. 这样就可以把$\xi$限制在$H$上,看成以$H$为状态空间的不可约正常返马氏链,再用定理 3.13 的推论,就得到(3.13)成立.

2)$\Longrightarrow$3). 设 $f\in\mathscr{F}_I$ 且有界，令 $\varphi(i)\triangleq E_i(f)$，则

$$\begin{aligned}\eta_n\triangleq E(f|\mathscr{F}_n) &= E(f(\xi_0,\cdots,\xi_k,\cdots)|\mathscr{F}_n)\\ &= E(f(\xi_n,\cdots,\xi_{n+k},\cdots)|\mathscr{F}_n)\\ &= E(f(\xi_n,\cdots,\xi_{n+k},\cdots)|\xi_n) = \varphi(\xi_n).\end{aligned}$$

显然，$\{\eta_n,\mathscr{F}_n\}$是一个一致可积鞅. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n(\omega) = f(\omega)\in\mathscr{F}_\infty \quad (\text{a.e.}),$$

进而，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k(\omega) = f(\omega) \quad (\text{a.e.}).$$

另一方面，由(3.13)，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k(\omega) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(\xi_k)\to E\varphi(\xi_k)\\ &= E(\eta_k(\omega)) = Ef(\omega).\end{aligned}$$

于是

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k(\omega) = Ef(\omega),$$

也就是说一切对 $\mathscr{F}_I$ 可测的有界函数都是常数(a.e.)，即$\forall A\in\mathscr{F}_I$，$1_A(\omega)=\text{const}$(a.e.)，即 $1_A(\omega)$几乎处处为 0 或 1，也就是 $P(A)=0$ 或 1.

3)$\Longrightarrow$1). 用反证法. 设 1)不成立，即μ在 H_1,H_2 两个以上正常返状态类上有测度(平稳初分布不可能在非常返态上有测度)，那么令

$$\Omega_1 = \{\omega;\xi_n(\omega)\in H_1,\quad \forall n\geqslant 0\},$$

$$\Omega_2 = \{\omega;\xi_n(\omega)\in H_2,\quad \forall n\geqslant 0\},$$

显然，$\Omega_1,\Omega_2\in\mathscr{F}_I$，而且

$$P(\Omega_i) = \mu(H_i) > 0 \quad (i=1,2).$$

所以 3)不成立. 这样就证明了 3)$\Longrightarrow$1). ▌

注：定理 3.14 中 2)与 3)的等价性也适用于任意状态空间的马氏过程.

命题 3.15 设 $\xi=\{\xi_n;n\geqslant 0\}$是平稳马氏链，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k,\xi_{k+1},\cdots)=g(\omega)(L^1\text{ 意义下},E|f|<+\infty),$$

则 $g\in\mathscr{F}_I$，而且

$$g(\omega)=E(f(\xi_0,\xi_1,\cdots)|\mathscr{F}_I).$$

证明 1) 因为 $g\in\mathscr{F}_\infty$，所以有表达式 $g=g(\xi_0,\xi_1,\cdots)$，于是

$$\begin{aligned}g=g(\xi_0,\xi_1,\cdots)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k,\xi_{k+1},\cdots)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_{k+1},\xi_{k+2},\cdots)\\&=g(\xi_1,\xi_2,\cdots)=\cdots=g(\xi_k,\xi_{k+1},\cdots),\quad(\text{a.e.})\end{aligned}$$

从而 $g\in\mathscr{F}_I$.

2) 对 $\forall\ A\in\mathscr{F}_I$，应有

$$1_A(\omega)=\psi(\xi_0,\xi_1,\cdots)=\psi(\xi_k,\xi_{k+1},\cdots),\quad(\text{a.e.})$$

因此

$$E(g1_A)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}E(f(\xi_k,\xi_{k+1},\cdots)\psi(\xi_k,\xi_{k+1},\cdots)).$$

由于 ξ 的平稳性，上式变为

$$E(g1_A)=E(f(\xi_0,\xi_1,\cdots)\psi(\xi_0,\xi_1,\cdots))=E(f1_A).\ \blacksquare$$

上面的命题 3.15 与定理 3.14 是一般平稳过程遍历论的特例. 满足定理 3.14 的条件 3)的平稳过程称为**遍历的**. 人们也把满足条件 1)的平稳马氏链或不可约正常返马氏链(两者本质上相同)称为**遍历的**马氏链.

推论 命题中的 g 在 $\Omega_k\triangleq\{\omega:\xi_0\in H_k\}$ 上 a.e. 地取常数值，在 $\left(\bigcup_k\Omega_k\right)^c$ 上 a.e. 地为 0，其中 H_k 为正常返类. 而且我们还有 $\mathscr{F}_I=\sigma\{\Omega_k:\forall$ 正常返类 $H_k\subset\mathscr{S}\}$ 的完备化.

证明 由 $\xi=\{\xi_n;n\geqslant 0\}$ 在 H_k 上的正常返性，对于 $\omega\in\Omega_k$，我们有 $\xi_n(\omega)\in H_k(\forall\ n)$. 所以

$$1_{\Omega_k}(\omega)=1_{H_k}(\xi_0(\omega))=1_{H_k}(\xi_n(\omega)).$$

因而$1_{\Omega_k}(\omega)\in\mathscr{F}_I$，而且不失一般性可以把$\xi$限制到$H_k$上考虑，即不妨假定$\Omega=\Omega_k$. 但是定理 3.14 证明了此时的$\mathscr{F}_I$可测函数必 a.e. 地是常数，可见在本命题中的一般情形，$\mathscr{F}_I$可测函数必 a.e. 地在各个Ω_k上取常数值. 也就是$\mathscr{F}_I=\sigma\{\Omega_k;\forall$ 正常返类 $H_k\}$的完备化. ∎

§4 转移概率的极限

定理 3.16 设 $\boldsymbol{P}$ 不可约正常返非周期，则

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}^n=L.$$

证明 我们这里采用概率方法——耦合链方法——来证明本定理，以便避免像一般经典证法那样引用数论的结果；同时也较少利用马氏链的特殊性，以便推广这个证法到连续状态空间的马氏过程.

首先让我们构造两个相互独立同转移阵 $\boldsymbol{P}$ 的马氏链 X 与 Y，使它们的初分布分别是π与$\{P(Y_0=j)=1\}$. 前者是一个平稳马氏链. 由独立性得到：对 $m\leqslant n$

$$P(X_n=j,Y_n=k|X_m=i,Y_m=l)=p_{ij}(n-m)p_{lk}(n-m).$$

由 $\boldsymbol{P}$ 的非周期性与不可约性，容易看出$\{Z_n=(X_n,Y_n);n\geqslant1\}$仍是一个可数状态不可约非周期马氏链. 又由于

$$\sum_{i,l}\pi_i\pi_lP(X_n=j,Y_n=k|X_m=i,Y_m=l)$$

$$=\sum_i\pi_ip_{ij}(n-m)\sum_l\pi_lp_{lk}(n-m)=\pi_j\pi_k>0,$$

可见$\{\pi_j\pi_k\}_{j,k\in\mathscr{S}}$是马氏链 $Z=\{Z_n;n\geqslant1\}$的不变测度，因而 Z 也是正常返的. 令

$$D=\{(i,i),i\in\mathscr{S}\},\quad\tau_D=\min\{t;Z_t\in D\}.$$

Z 应在有限时间到达 D，即 $P(\tau_D<+\infty)=1$.

下面让我们来证明

$$\lim_{n\to\infty}[P(X_n=i)-P(Y_n=i)]=0 \quad (\forall\, i\in\mathscr{S}), \tag{3.14}$$

因为只要上式成立就有定理的结论：

$$\lim_{n\to\infty}p_{ji}(n)=\lim_{n\to\infty}P(Y_n=i)=\lim_{n\to\infty}P(X_n=i)=\pi_i.$$

事实上，由强马氏性以及 $X_{\tau_D}=Y_{\tau_D}$，我们可以推出对于 $\mathscr{F}_n^X=\sigma\{X_k:k\leqslant n\}$ 及 $\mathscr{F}_n^Y=\sigma\{Y_k:k\leqslant n\}$ 的乘积 $\mathscr{F}_n=\mathscr{F}_n^X\times\mathscr{F}_n^Y$ 有

$$\begin{aligned}P(X_n=i,\tau_D\leqslant n)&=E(E(X_{\tau_D+(n-\tau_D)}=i,n-\tau_D\geqslant 0|\mathscr{F}_{\tau_D}))\\&=E(E(X_{\tau_D+(n-\tau_D)}=i,n-\tau_D\geqslant 0|X_{\tau_D}))\\&=E(E(Y_{\tau_D+(n-\tau_D)}=i,n-\tau_D\geqslant 0|Y_{\tau_D}))\\&=P(Y_n=i,\tau_D\leqslant n).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}P(X_n=i)&=P(X_n=i,\tau_D\leqslant n)+P(X_n=i,\tau_D>n)\\&\leqslant P(Y_n=i,\tau_D\leqslant n)+P(\tau_D>n)\\&\leqslant P(Y_n=i)+P(\tau_D>n).\end{aligned}$$

同理可证

$$P(Y_n=i)\leqslant P(X_n=i)+P(\tau_D>n).$$

故

$$\begin{aligned}&|P(Y_n=i)-P(X_n=i)|\\&\leqslant P(\tau_D>n)\xrightarrow[n\to\infty]{}P(\tau_D=+\infty)=0.\end{aligned}$$

这就证明了(3.14). ▌

定理 3.17 设 $\boldsymbol{P}$ 是零常返、不可约、非周期的，则

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}^n=0.$$

证明 类似于定理 3.16 的证明，我们构造相互独立，以 $\boldsymbol{P}$ 为转移阵的两个马氏链 X 与 Y，使 $P(X_0=i)=P(Y_0=j)=1$. 于是 $Z=(X,Y)$ 是一个不可约非周期链，而且转移概率是

$$P(Z_{n+m}=(k,l)|Z_m=(i,j))=p_{ik}(n)p_{jl}(n).$$

(1) 若 $\{Z_n\}$ 非常返，那么

$$\sum_n p_{ii}^2(n)<+\infty\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}p_{ii}(n)=0\quad(\forall\, i\in\mathscr{S}).$$

这样定理已经证完.

(2) 如果$\{Z_n\}$常返,显然 $Z_0=(i,j)$. 同定理 3.16,可得到

$$P_{(i,j)}(\tau_D<+\infty)=1$$

与

$$|P(X_n=l)-P(Y_n=l)|\to 0\ (n\to\infty),$$

即

$$\lim_{n\to\infty}|p_{il}(n)-p_{jl}(n)|=0. \tag{3.15}$$

设$\overline{\lim_{n\to\infty}}p_{jj}(n)=\lim_{m\to\infty}p_{jj}(n_m)=\alpha_j$,于是由(3.15)

$$\lim_{m\to\infty}p_{ij}(n_m)=\alpha_j.$$

用取对角子列的办法,可取子列 n_{m_s},使$\forall\ k,\lim\limits_{s\to\infty}p_{jj}(n_{m_s}-k)$存在. 再令

$$\tilde{\alpha}_j^{(k)}=\lim_{s\to\infty}p_{jj}(n_{m_s}-k),$$

于是由(3.15)

$$\alpha_j=\lim_{s\to\infty}p_{jj}(n_{m_s})=\lim_{s\to\infty}\sum_l p_{jl}(k)p_{lj}(n_{m_s}-k)$$

$$=\sum_l p_{jl}(k)\,\tilde{\alpha}_j^{(k)}=\tilde{\alpha}_j^{(k)},$$

即
$$\lim_{m\to\infty}p_{jj}(n_{m_s}-k)=\alpha_j\quad(\forall\ k).$$

以下不妨简记 n_{m_s}为 n_m,于是我们得到

$$\alpha_j\sum_{l=1}^{n_m}lf_{jj}(l)=\sum_{l=1}^{n_m}f_{jj}(l)(l\alpha_j)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{l=1}^{n_m}f_{jj}(l)\sum_{k=0}^{l-1}p_{jj}(n_m-k)$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{n_m}p_{jj}(n_m-k)\sum_{l=k+1}^{\infty}f_{jj}(l)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{n_m}p_{jj}(n_m-k)r_{jj}(k)=1$$

(见命题 3.12 的证明). 于是

$$0 \leqslant \alpha_j \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sum_{l=1}^{n_m} l f_{jj}(l)} = 0.$$

由不可约性，立即得到 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}(n) = 0$，因而

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = 0. \quad \blacksquare$$

注：定理 3.17 中非周期条件可以取消，因为 $p_{jj}(k)=0 (k\neq nd)$，而 $p_{jj}(nd)\to 0\ (n\to\infty)$.

命题 3.18 设 i 非常返，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \begin{cases} 0, & j \text{ 非常返或零常返}; \\ f_{ij}^* \pi_j, & j \text{ 正常返且非周期}. \end{cases}$$

证明 首先由 $\sum_n p_{jj}(n) < +\infty$，得到

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}(n) = 0.$$

于是由控制收敛定理，就得到

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ij}(k) p_{jj}(n-k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}(k) p_{jj}(n-k) 1_{\{k\leqslant n\}}(k) \\ &= \begin{cases} 0, & j \text{ 非常返}; \\ f_{ij}^* \pi_j, & j \text{ 常返}. \end{cases} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

综合定理 3.16，3.17 及命题 3.18，我们得到下面的定理.

定理 3.19 设 $\boldsymbol{P}$ 非周期，则

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{L} = (L_{ij}),$$

其中

$$L_{ij} = \begin{cases} (\underline{\pi}_k)_j, & i,j \in H_k; \\ f_{ij}^* (\underline{\pi}_k)_j, & i \in U, j \in H_k; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

而状态空间

$$\mathscr{S} = U \cup H_1^0 \cup H_2^0 \cup \cdots \cup H_k^0 \cup \cdots \cup H_1 \cup H_2 \cup \cdots$$

(H_i 为正常返类；H_i^0 为零常返类；U 为非常返类）. 即

$$
L = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & (f_{ij}^*(\underset{\sim}{\pi}_1)_j) & (f_{ij}^*(\underset{\sim}{\pi}_2)_j) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\,\underset{\sim}{\pi}_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\,\underset{\sim}{\pi}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{l} U \\ H_1^0 \\ H_2^0 \\ \vdots \\ H_1 \\ H_2 \\ \vdots \end{array}
$$

（列依次为 U, H_1^0, H_2^0, $\cdots$, H_1, H_2, $\cdots$）

对周期为 d 的马氏链，考虑 $\boldsymbol{P}(nd) \triangleq \widetilde{\boldsymbol{P}}(n)$，就得到一个非周期马氏链，于是我们相应地可以得到定理如下：

定理 3.20 设 $\boldsymbol{P}$ 是不可约周期为 d 的正常返马氏链，则对 $\forall\ i,j \in \mathscr{S}$，$\exists\ 0 \leqslant t_{ij} < d$，使

$$p_{ij}(n) = 0 \quad (n \neq md + t_{ij}),$$

而且 $\lim\limits_{k\to\infty} p_{ij}(kd + t_{ij}) = \pi_j d$.

证明 任意取定一个状态 i，令

$C_k = \{j$；对充分大的 m，由 i 可经过 $k + md$ 步以正概率到达 $j\}$ $(k=1,2,\cdots,d)$；不难由 $\boldsymbol{P}$ 的周期性与不可约性证明 $\{C_k\}$ 是 $\mathscr{S}$ 的一个分割，而且 C_k 中状态可以而且仅可经 $k' - k + md$ 步到达 $C_{k'}$，于是若令

$$\xi_0 \in C_d,\ \ \eta_n = \xi_{nd},\ \ \eta = \{\eta_n; n \geqslant 0\},$$

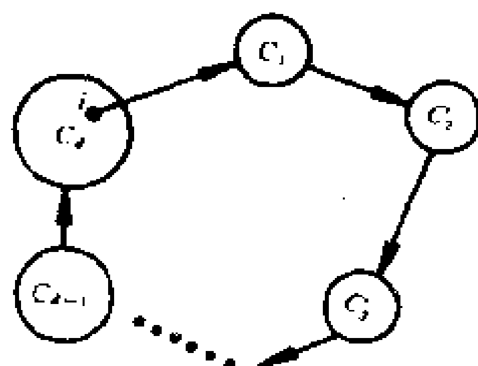
η 是一个不可约正常返非周期马氏链. 于是

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{\eta}(n)\ 存在\left(p_{ii}^{\eta}(n) = P(\eta_{nd} = i \mid \eta_0 = i) = p_{ii}(nd)\right),$$

而且

$$\pi_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nd} \sum_{k=0}^{nd-1} p_{ii}(k) = \frac{1}{d} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_{ii}(kd) = \frac{1}{d} \lim_{n\to\infty} p_{ii}(nd).$$

也即
$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}(nd) = d\pi_i.$$



$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(t_{ij}+nd) = \lim_{n\to\infty} \sum_{s=0}^{t_{ij}+nd} f_{ij}(s) p_{jj}(nd+t_{ij}-s),$$

其中 $t_{ij}=(k'-k)(\mathrm{mod}\,d)$（当 $i\in C_k, j\in C_{k'}$）. 又由于

$$0 \leqslant f_{ij}(n) \leqslant p_{ij}(n) = 0, \text{ 当 } n \neq t_{ij}+md,$$

前面的极限应为

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(t_{ij}+nd) = \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} f_{ij}(t_{ij}+sd) p_{jj}(n-s)d)$$

$$= f_{ij}^* \pi_j d = \pi_j d. \ \blacksquare$$

推论 对非不可约马氏链，当 j 不是正常返的周期状态时，$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)$ 存在.

习 题

1. 设 $\xi=\{\xi_n; n=1,2,\cdots\}$ 是一个可数状态马氏链，它的转移阵是 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$，$\xi_0=i$. 试对 $\forall\ n_1,n_2,\cdots,n_k$，求出 $\xi_{n_1},\xi_{n_2},\cdots,\xi_{n_k}$ 的联合分布.

2. （二维随机徘徊）设 $\mathscr{S}$ 是全平面的整数格点，粒子每步可以向上下左右四方向之一走一步，各步运动间相互独立且同分布：

$$P(\text{第 } n \text{ 步向上移一步}) = p_1,$$

$$P(\text{第 } n \text{ 步向下移一步}) = q_1,$$
$$P(\text{第 } n \text{ 步向左移一步}) = p_2,$$
$$P(\text{第 } n \text{ 步向右移一步}) = q_2 = 1 - p_2 - q_1 - p_1,$$
将粒子在第 n 步时所在的位置记为 ξ_n. 试证明 $\{\xi_n, n=0,1,\cdots\}$ 是马氏链,并写出转移函数.

3. (简单服务系统模型)设某系统同时只能最多为一个顾客服务;如果在第 n 分钟该系统有一个顾客在接受服务,它在第 $n+1$ 分钟前结束服务的概率是 p,而且这时系统就在第 $n+1$ 分钟开始为下一个等待着的顾客服务. 又设在第 n 分钟到第 $n+1$ 分之间到达顾客的总数 Z_n 服从以 λ 为参数的 Poisson 分布, Z_n $(n=1,2,\cdots)$ 相互独立并与系统的服务独立. 令 X_n 是在第 n 分时等待顾客与接受服务的顾客总数,试说明 $\{X_n\}$ 是马氏链,并求转移概率.

4. 某人做一系列的试验,第 n 轮试验成功的概率为 p_n,失败的概率为 q_n,从第 1 轮开始做起,如果成功,则下次做下一轮试验;如果失败,则下次从头从第 1 轮重新做这一系列试验. 记 $\xi_n(\omega)$ 为第 n 次试验所达到的试验的轮号,试证明 $\{\xi_n; n=1,2,\cdots\}$ 是马氏链,并求出其转移阵.

5. 试对本章例 3、4 求出它的非常返状态类与各互通常返类.

6. 设一马氏链 ξ 的转移概率阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

试求非常返类、各互通常返类及各常返类中状态的周期.

7. 试证明例 2 中随机徘徊常返当且仅当 $p=q$.

提示：先求出 $p_{30}(n)$，再估计 $\sum_n p_{30}(n)$ 是否收敛.

8. (高维随机徘徊的常返性)设 $X_0,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 相互独立，X_0 是取值为 d 维格点的随机变量，又若

$$P(\xi_n = x) = p(x),\forall\ x \in \{(s_1,\cdots,s_d);s_i = \pm 1,1 \leqslant i \leqslant d\}.$$

令 $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n}\xi_k$，则 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是一个 d-维的随机徘徊；试求证它是常返的充要条件是

$$\lim_{z\to 1-0}\int_C \operatorname{Re}(1 - z\varphi(s))^{-1}\mathrm{d}s < +\infty,$$

这里 $\varphi(s)$ 是 ξ_n 的特征函数，C 是以 $(0,0,\cdots,0)$ 为中心、边长为 1 的 n-维立方体.

提示：考虑 ξ_n 的特征函数 $\varphi(\lambda)$，并由此求出 $\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ 的特征函数，从而得到转移函数 $p(n,(0,\cdots,0),(0,\cdots,0))$ 应满足

$$\sum_n p(n;(0,\cdots,0),(0,\cdots,0))$$

$$= \lim_{z\to 1-0}\sum_n \frac{2^n}{(2\pi)^d}\int_C (z\varphi(s))^n\mathrm{d}s,$$

其中 C 是以 $(0,0,\cdots,0)$ 为中心、边长为 2π 的 n-维立方体.

9. 设

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^2} & 1-\frac{1}{2^2} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^3} & 1-\frac{1}{2^3} & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \frac{1}{2^n} & 1-\frac{1}{2^n} & \\ & & & & & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

试判别此链是否常返.

10. 设

$$P=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

试将状态分成互通等价类,并求出各类的周期、常返性及 $\boldsymbol{L}$. $\boldsymbol{P}$ 有不变测度吗? 如有,请求出全部不变测度.

11. 试证明状态空间有限的马氏链一定至少有一个常返状态,且不可能有常返零状态.

提示: 注意这时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{1}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{1} \quad 与 \quad \boldsymbol{L1}=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{L}^{(n)}\boldsymbol{1}=1.$$

12. 试证明一个马氏链的不变测度若不唯一,则一定有无穷多个. 设

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

试求出它的全部不变测度.

13. 求例 7(Ehrenfest 扩散链模型)的平均回访时间: $\mu(i)=E(\tau_i)$, 其中 $\tau_i=t_2-t_1$, $t_1=\min\{t>0, X_t=i\}$, $t_2=\min\{t>t_1; X_t=i\}$. 并由此证明

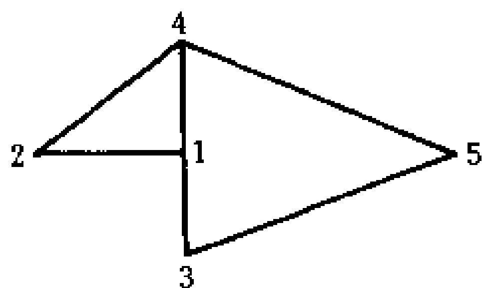
$$\frac{\mu(N+i)}{\mu(N)}\sim\left(1+\frac{i}{N}\right)^{i}\quad\left(相差\ o\left(\frac{1}{N}\right)\right),$$

从而说明返回概率最大的状态 N 的平均时间比返回概率最小的状态的平均时间要差 2^N 倍，当 N 非常大时，粗略地讲马氏链几乎大部分时间都停留在 N 附近的状态，好像几乎不可能返回像 0 与 2^N 这样的状态. 试求出时间充分长后此马氏链的平均返回时间：$\lim\limits_{n\to\infty}E(t_n(\omega))$，其中

$$t_n(\omega)=\inf\{t>n:X_t=X_n\}.$$

14. 某工厂实行质量控制的检查制度如下：一开工认为生产未达稳定，则每 5 分钟抽样一次；如果连续抽样 5 次全部合格，则改为初步稳定生产阶段抽样，每半小时抽样一次；如果连续 3 次合格，则改为正常生产抽样阶段，每 8 小时抽样一次；如果在初步稳定阶段又连续 3 次抽样不合格，则改为不稳定生产抽样模式；如果正常生产抽样发现不合格，则退为初步稳定生产抽样. 把不稳定生产、初步稳定生产、正常生产，看成工厂处于三个不同状态，试构造一个时齐马氏链来描述工厂生产所处状态并利用遍历性定理给出由一个月的生产检查报告来求出此马氏链转移概率阵的方法，再设法估计工厂在开工足够长时间后它处于正常生产状态与不稳定生产状态的概率.

15. 设有一个铁路网络，有 N 个车在它的各站之间行驶. 每天早晨每辆车由它的前一天到达的站出发到别的站去，晚间可在当天到站装卸货物. 已知调度方案是每个发站以相同的比例发放车辆去该站可能到的各站. 求近似地运转时间充分长后各站停有车辆的比例. 铁路网络的联通情况如下图：总共有 5 个站.



16. 设 $\{\xi_n;n\geqslant 0\}$ 是 P 为转移阵的有限马氏链，I 是状态空间，A,B 为 I 的不交子集. τ_A,τ_B 分别为马氏链首中 A,B 的时间. 令 $f(i)=P_i(\tau_A<\tau_B)$.

1) 当 i 变化时，写出 $f(i)$ 满

足的方程；

2） 在什么条件下，上方程有唯一解.

提示：

$$
\begin{aligned}
f(i) &= P_i(\tau_A < \tau_B) \\
&= P_i(1 \leqslant \tau_A < \tau_B) + P_i(\tau_A = 0) \\
&= \sum_{l \in A^c \cap B^c} p_{il} P_l(\tau_A < \tau_B) + \sum_{l \in A} p_{il} P_l(\tau_A < \tau_B) \\
&= \sum_j p_{ij} f(j) \quad (\text{对 } i \overline{\in} A \cup B),
\end{aligned}
$$

其中 $f(i) = \begin{cases} 1, & i \in A; \\ 0, & i \in B. \end{cases}$

17. 设 τ_A 为 A 的首中时，令 $g(i,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n P_i(\tau_A = n)$. 问当 i 变化时，$g(i,\theta)$满足什么方程？

18. 对有限不可约链，证明：∃ 常数 $\rho<1$，使对∀ i,j

$$P_i(\tau_j > n) \leqslant 2\rho^n, \quad n \geqslant 0,$$

其中 τ_j 是首中状态 j 的时刻.

19. 设$\{\xi_n\}$是互通马氏链，转移阵为 $\boldsymbol{P}$. $Y_n = \xi_{T_n}$，其中 $T_0 = 0, T_{n+1} = \min\{m > T_n : \xi_m \neq \xi_{T_n}\}$.

1） 证明：Y_n 为马氏链，并求转移函数 $\boldsymbol{Q}$.

2） 证明：Y_n 常返$\Longleftrightarrow\xi_n$ 常返.

3） 设 ξ_n 常返，求 $\boldsymbol{P}$ 的不变测度与 $\boldsymbol{Q}$ 的不变测度的关系.

4） 证明：在状态无限时，可能 Y_n 正常返，而 ξ_n 为零常返.

20. 设 ξ_n 为不可约正常返马氏链，平稳分布为 π. 令 $W_{ij} = P_i(\tau_j < \tau_i)$. 证明：$\frac{W_{ij}}{W_{ji}} = \frac{\pi_j}{\pi_i}$，这里 τ_i, τ_j 是首中 i,j 的时刻.

21. 将定理 3.6 应用于随机徘徊$(a_i + b_i = 1)$：

$$p_{ij} = \begin{cases} a_i, & j = i+1; \\ b_i, & j = i-1 \quad (i \geqslant 1, p_{01} = 1); \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

得到此随机徘徊常返的充要条件是

$$R(\infty)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}=+\infty \quad \text{(Harris 徘徊)}.$$

22. （时间倒逆过程）设$\underline{\mu}=\{\mu_i:i\in\mathscr{S}\}$是 $\boldsymbol{P}$ 的不变测度. 令 $p_{ji}^{-}\triangleq\mu_i p_{ij}/\mu_j$，试证明 $p_{ji}^{-}=\boldsymbol{P}^{-}$ 仍是一个随机矩阵，而且$(\boldsymbol{P}^{-})^n=(\mu_i p_{ij}(n)/\mu_j)$. 若将$\underline{\mu}$作为某个以 $\boldsymbol{P}$ 为转移阵的马氏链 ξ 的初分布，则

$$P(\xi_m=j\mid\xi_{n+m}=i)=p_{ji}^{-}(n)\triangleq\frac{\mu_i p_{ij}(n)}{\mu_j}.$$

23. 试证明常返（不一定正常返）不可约马氏链存在唯一的不变测度使它在某一固定状态 j 具有测度为 1.

提示：存在性的证明：考虑 $\mu_i={}_{(j)}p_{ji}^{*}\ (i\neq j),\mu_j=1$.

唯一性的证明：考虑对某一不变测度$\underline{\mu}$的时间倒逆 $\boldsymbol{P}^{-}$.

24. 试证明当 $\boldsymbol{P}$ 常返不可约时对$\forall\ i,j,k$

$${}_{(i)}p_{ik}^{*}={}_{(i)}p_{ij}^{*}\ {}_{(j)}p_{jk}^{*}.$$

提示：先证明$\{\nu_k\triangleq{}_{(i)}p_{ik}/{}_{(i)}p_{ij}\}$是一个不变测度.

25. 试证明对 $j\bar{\in}H$

$$\begin{aligned}{}_Hp_{ij}(n)&={}_{\{k\}\cup H}p_{ij}(n)+\sum_{\nu=1}^{n-1}{}_{\{k\}\cup H}p_{ik}(\nu)\,{}_Hp_{kj}(n-\nu)\\&={}_{\{k\}\cup H}p_{ij}(n)+\sum_{\nu=1}^{n-1}{}_Hp_{ik}(\nu)\,{}_{\{k\}\cup H}p_{kj}(n-\nu),\end{aligned}$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}{}_Hp_{ij}(n)}{1+\sum_{n=1}^{N}{}_Hp_{ii}(n)}=\frac{{}_{\{i\}\cup H}p_{ij}^{*}}{{}_Hp_{ij}^{*}}+{}_{\{i\}\cup H}p_{ij}^{*}.$$

26. (Furstenberg)X_n 是马氏链，f 有界可测，证明

1) $Y_n\equiv\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}((\boldsymbol{P}f)(X_k)-f(X_{k+1}))$是一致平方可积鞅；

2) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\boldsymbol{P}f(X_k)-f(X_{k+1}))\xrightarrow{n\to\infty}0$, a.e..

27. 令 j 固定，z_0 为向量，其转置为

$$z_0^T=(f_{0j}^*,f_{1j}^*,\cdots,f_{nj}^*,\cdots),\quad s=\{0,1,\cdots\},$$

则 z_0 是无穷维线性方程组

$$z=\boldsymbol{P}z+p^{(\cdot,j)}$$

的最小非负解，其中 $p^{(\cdot,j)}$ 是转移阵 $\boldsymbol{P}$ 的第 j 列.

28. 设 ξ_n 为在 0 点带吸收壁的(简单)随机徘徊($p+q=1$)

$$P(\xi_{n+1}=k\,|\,\xi_n=i)=\begin{cases}q, & i\neq 0,k=i-1;\\ p, & i\neq 0,k=i+1;\\ 1, & i=0,k=0.\end{cases}$$

利用 27 题证明

(1) $f_{i0}^*=\begin{cases}1, & p\leqslant q;\\ \left(\dfrac{q}{p}\right)^i, & p>q.\end{cases}$

(2) $P(\xi_n\to\infty\,|\,\xi_0=i)=1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^i$.

29. 如果 $\boldsymbol{P}$ 是一个准转移阵，即

$$\boldsymbol{P}\geqslant 0,\ \boldsymbol{P}\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1},$$

无穷维齐次线性方程组

$$z=\boldsymbol{P}z$$

以 $z^{(0)}=\boldsymbol{P}^T\mathbf{1}$ 为初始值的递代极限 u_0 满足：对此方程组的任一个满足

$$-\mathbf{1}\leqslant u\leqslant\mathbf{1}$$

的解 u，恒有

$$-u_0\leqslant u\leqslant u_0,$$

这样的 u_0 称为方程组的最大解. 请用这个结论给出定理 3.6 推论 1的另一个证明.

30. 设 ξ_t 是以 0 为弹性壁的离散时间的生灭链：

$$P=\begin{pmatrix} r_0 & p_0 & & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & & \\ & q_2 & r_2 & p_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (q_0=0, q_i+p_i+r_i=1).$$

利用定理 3.6 推论 1 证明:此链为常返当且仅当

$$\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{q_1}{p_1}\right)\cdots\left(\frac{q_k}{p_k}\right)<\infty.$$

31. 无穷维非负系数的线性方程组

$$z=Az+b$$

的非负最小解的第二种递代求法是:取 b 的任意一个非负分解

$$b=\sum_{n=1}^{\infty}b^{(n)} \quad (b^{(n)}(\text{无穷维})\geqslant 0),$$

令

$$u^{(0)}=0, \ \cdots, \ u^{(n+1)}=Au^{(n)}+b^{(n+1)},$$

$$u_0=\sum_{n=0}^{\infty}u^{(n)}.$$

证明 u_0 是方程 $z=Az+b$ 的最小非负解. 再用这个方法证明:对于马氏链 ξ_n 的转移阵 P,当 j 固定时,从 i 出发能到达 j 的平均时间组成的行向量$(E_i\sigma_j, i\in S)$的转置(其中 $\sigma_j=\inf\{n\geqslant 1;\xi_n=j\}$)是无穷维线性方程组

$$z=\hat{I}^{(j)}Pz+f^{(j)}$$

的最小非负解,其中

$$\hat{I}^{(j)}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots \text{第 } j \text{ 行},$$

$$(f^{(j)})^T = (f_{0j}^*, f_{1j}^*, \cdots, f_{nj}^*, \cdots).$$

32. 证明对于 28 题中的马氏链，有($\forall\ j \geqslant 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n f_{j0}(n) = \begin{cases} \dfrac{j}{q-p}, & p < q; \\ \infty, & p = q. \end{cases}$$

33. 令马氏链 ξ_n 首次进入常返态类的时刻为 τ_U：

$$\tau_U = \inf\{n \geqslant 1 : \xi_n \overline{\in} U\} \quad (U \text{ 为全体暂态}).$$

证明下述行向量

$$(E_i\tau_U : i \in U) \quad \left(E_i\tau_U = \sum_{j \in U} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n)\right)$$

的转置是线性方程组

$$z = \boldsymbol{P}_U z + \boldsymbol{1}$$

的最小非负解，其中 $\boldsymbol{P}_U$ 是指 $\boldsymbol{P}$ 在 U 上所限制而得的准转移阵.

34. 用上题结论证明在 0 与 N 有两个吸收壁的(简单)随机徘徊有平均吸收时间($1 \leqslant i \leqslant N-1$)

$$E_i\tau_U = \begin{cases} \dfrac{1}{p-q}\left[N \dfrac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^i - 1}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^N - 1} - i\right], & p \neq q; \\ i(N-i), & p = q = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

35. 设马氏链 ξ_n 的全体暂态为 U，$i \in U$，令 α_i 为 i 出发后马氏链永远留在 U 内的概率：

$$\alpha_i = P(\xi_n \in U, \forall\ n \geqslant 1 \mid \xi_0 = i).$$

记 $\alpha^T = (\alpha_i, i \in U)$，则 α 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} z = \boldsymbol{P}_U z, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1 \end{cases}$$

的最大解，其中 $\boldsymbol{P}_U$ 为 $\boldsymbol{P}$ 在 U 上的限制.

36. 记号同上题，又设 H 为 ξ_n 的一个常返类，$i \in U$，令 β_i 为马氏链从 i 出发最终被 H 吸收的概率：

$$\beta_i = P_i\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\xi_n \in H\}\Big).$$

记 $\beta^T = (\beta_i, i\in U)$，则 β 是线性方程组

$$z = \boldsymbol{P}_U z + p_H$$

的最小非负解，其中 $(p_H)^T \triangleq \Big(\sum_{j\in H} p_{ij}: i\in U\Big)$.

37. 设马氏链 ξ_n 没有吸收态(单点常返类). 令

$$\eta_0 = 0,$$

$$\eta_n = \inf\{n > \eta_{n-1}: \xi_n \neq \xi_{\eta_{n-1}}\} \quad (n \geqslant 1),$$

$$X_n = \xi_{\eta_n} \quad (n \geqslant 0).$$

证明 X_n 也是马氏链，其转移阵为 $\left((1-\delta_{ij})\dfrac{p_{ij}}{1-p_{ii}}\right)$，而且 X_n 常返不可约当且仅当 ξ_n 为常返不可约.

38. 证明对于一维随机徘徊有

$$f_{ii}^* = 1 - |p - q|.$$

39. 设 ξ_n 为暂态不可约马氏链，求证

(1) $\forall\, j$ 固定，$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}(n)$ 是过份函数.

(2) 设 h 为过份函数，则有

$$h(i) \geqslant f_{ij}^* h(j).$$

40. 圆周上有 N 个格点，质点在格点上作随机徘徊(顺逆时走一格的概率各为 p 及 q)，求证

(1) 从另一边初次返回初始位置的概率为

$$\begin{cases} \dfrac{(p^N + q^N)(p-q)}{p^N - q^N}, & p \neq q; \\[2ex] \dfrac{1}{N}, & p = q = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

(2) 质点回到初始位置的平均时间为 N.

(3) 质点从状态 1 到达 i 的平均时间为

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{p-q}\left\{N\dfrac{\left(\dfrac{q}{p}\right)-1}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^{N}-1}-i\right\}, & p \neq q; \\
i(N-i), & p = q = \dfrac{1}{2}.
\end{cases}
$$

41. 记

$$\sigma_j = \inf\{n \geqslant 1, \xi_n = j\}.$$

设马氏链 ξ_n 为不可约正常返，试用习题 31 证明 $E_i\sigma_j < \infty (\forall\ i, j)$.

42. 设 ξ_n 不可约，则它是正常返的充要条件是：$\exists$ 状态 j 及非负列 $\{z_i : i \in S\}$ 满足

$$\sum_k p_{ik} z_k \begin{cases} \leqslant z_i - 1, & i \neq j, \\ < \infty, & i = j, \end{cases}$$

在条件成立下可取

$$z_i = \begin{cases} E_i\sigma_j, & i \neq j; \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

提示：用习题 31. 令 $\delta \triangleq \sum_k p_{jk} z_k$，证明

$$\begin{cases} z^{(0)} = z, \\ z^{(n+1)} = \boldsymbol{P} z^{(n)} \quad (n \geqslant 1) \end{cases}$$

定义的 $z^{(n)}$ 满足

$$z^{(n+1)} \leqslant (1+\delta)(\boldsymbol{P}^n)^{(j)} 1 + z^{(n)},$$

其中 $(\boldsymbol{P}^n)^{(j)}$ 为 $\boldsymbol{P}^{(n)}$ 的第 j 列. 令 $n \to \infty$.

43. 证明

$$(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{L})^n = \boldsymbol{P}^n - \boldsymbol{L} \quad (n \geqslant 1).$$

44. 证明：如果不可约链具有幂等的转移矩阵：$\boldsymbol{P}^1 = \boldsymbol{P}$，那末此链是正常返的，而且是独立同分布列.

45. 求证：有限马氏链不可约的充要条件为存在 n，使 $\boldsymbol{P}^n > 0$. 在条件成立下，必存在 $c > 0$，$0 < \rho < 1$，使

$$|\boldsymbol{P}^n - \boldsymbol{L}| \leqslant c\rho^n \boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T \quad (\text{指逐个元比较}).$$

46. 转移阵的一切列和都不超过 1 的无穷态不可约马氏链必

非正常返的.

47. 若 ξ_n 不可约，则 $\eta_n \triangleq (\xi_n, \xi_{n-1})$ 可以看成状态空间为 $\{(i,j): p_{ij}>0\}$ 上的不可约马氏链，且 η_n 的常返性、零性与 ξ_n 相同.

48. 设 $\boldsymbol{P}$ 不可约正常返，则以直积 $\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{P}$:

$$(\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{P})_{(i,j),(k,l)} \triangleq p_{ik}p_{jl}$$

为转移阵的马氏链也是不可约正常返的.

49. 证明 30 题的离散时间的单弹性壁生灭链为正常返的充要条件为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n\rho_n} < \infty,$$

其中

$$\rho_n = \left(\frac{q_1}{p_1}\right)\cdots\left(\frac{q_n}{p_n}\right).$$

平稳分布为

$$\pi_n = \frac{p_0}{p_n\rho_n}\pi_0.$$

特别，在(简单)随机徘徊时 $p_i=p(i\geqslant 0), q_i=q(i\geqslant 1)$，正常返的充要条件是 $p<q$，平稳分布是几何分布

$$\pi_n = \left(1-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^n.$$

50. 证明具有双侧弹性壁 0 与 N 的离散时间的生灭链：

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & q_{N-1} & r_{n-1} & p_{N-1} \\ & & & q_N & r_N \end{pmatrix}$$

必是不可约正常返的，其平稳分布为

$$\pi_n = \frac{p_{n-1}\cdots p_0}{q_n\cdots q_1}\pi_0.$$

又若一切 $p_i=\frac{1}{2}(i\leqslant N-1), q_i=\frac{1}{2}(i\geqslant 1)$，则 $\pi_i\equiv\frac{1}{N+1}$.

51. 记

$$g_{ij}=P\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\{\xi_n=j\}\,\big|\,\xi_0=i\Big),$$

则有

(1) $g_{ii}=\lim\limits_{n\to\infty}(f_{ii}^{*})^{n}, g_{ij}=f_{ij}^{*}g_{jj}$.

(2) 若 i 常返，$i\to j$，则 $g_{ji}=1$，且 j 常返(由此得到命题 3.3).

(3) $g_{ij}=0$ 当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_{ij}(n)<\infty$.

52. 证明比例极限定理(注意对链未限制)

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}p_{ij}(k)}{\sum\limits_{k=0}^{n}p_{jj}(k)}\xrightarrow{(n\to\infty)}f_{ij}^{*}\quad(\forall\, i,j\in S).$$

53. 证明对于常返不可约链有比例极限定理

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}p_{ij}(k)}{\sum\limits_{k=0}^{n}p_{ii}(k)}\xrightarrow{(n\to\infty)}e_{ij}^{*}<\infty\quad(\forall\, i,j\in S),$$

其中

$$e_{ij}^{*}=\sum_{n=1}^{\infty}{}_{\{i\}}p_{ij}(n),$$

而 ${}_{\{i\}}p_{ij}(n)$ 是禁忌概率. 显见 $e_{ii}^{*}=f_{ii}$.

提示：先证明 $i\neq j$ 时有

(1) $f_{ii}(n+m)\geqslant {}_{\{i\}}p_{ij}(n)\cdot f_{ji}(n)$;

(2) $p_{ij}(n)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}p_{ii}(k)\cdot{}_{\{i\}}p_{ij}(n-k)$.

54. 求证(Derman 定理)：不可约常返链有正的不变测度(但是可能为 σ 有限而并不一定有限)$\underline{u}$，它必定满足

$$u_j = u_i e_{ij}^* \quad (\forall\ i, j).$$

提示：令

$$\hat{p}_{ij} \triangleq u_j p_{ji}.$$

对 $\hat{p}_{ij}(n)$用 52 题(随着用 53 题于 $p_{ji}(n)$).

55. 不可约常返链有

$$e_{ij}^* e_{jk}^* = e_{ik}^*.$$

又若为正常返，则

$$e_{ij}^* = \frac{\pi_j}{\pi_i}.$$

56. $\underset{\sim}{u}$称为 P 的(或链的)盈测度(过份测度)，如果

$$\underset{\sim}{u} \geqslant \underset{\sim}{u}P, \quad \underset{\sim}{u} \geqslant 0, \quad \underset{\sim}{u} \neq 0.$$

证明对常返不可约链而言，$\hat{\underset{\sim}{u}}$是 P 的盈测度当且仅当对于$\forall\ j$，$\hat{\underset{\sim}{u}}$是 $\hat{P}$ 的过份函数，其中

$$\hat{u}_i \triangleq \frac{u_i}{e_{ji}^*}, \quad \hat{p}_{ik} = \frac{e_{jk}}{e_{ji}} p_{ki}.$$

进一步证明：不可约常返链的盈测度$\underset{\sim}{u}$有

$$u_j = u_i e_{ij}^*.$$

57. 证明不可约链为正常返的充要条件为有一个有限的盈测度.

提示：证明 $\sum_j e_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1 - f_{ii}^*) + \sum_{k=n}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \right].$

58. 设

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & \cdots \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (a_i > 0, i \geqslant 0),$$

则链是不可约常返链. 再证它是正常返的充要条件为 $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} < \infty$，这时平稳分布为$\left\{\pi_i = \frac{1}{\mu}\sum_{n=i}^{\infty} a_n ; i \geqslant 0\right\}$.

59. 设

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & 1-b_0 & & & \\ b_1 & & 1-b_1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_n & & & & 1-b_n \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$(1 > b_i > 0, i \geqslant 0)$，则链为不可约. 再证它为常返的充要条件为 $\sum_i b_i = \infty$，正常返的充要条件为

$$\sum_i b_i = \infty,\ \sum_i \prod_{k=0}^{i-1} (1-b_k) < \infty.$$

60. 列和也全是 1 的转移阵称为双随机转移阵. 求证有限双随机阵只有正常返态，并求有限不可约双随机阵的平稳分布.

61. 设$\{\eta_n\}$是独立同分布的正整值随机变量列，其母函数为 $g(z)\left(=\sum_{k=1}^{\infty} P(\eta_1 = k) z^k\right)$. ξ_n 是正常返不可约马氏链，那末

$$X_n \triangleq \xi_{\eta_1 + \cdots + \eta_n} \quad (n \geqslant 1),\ X_0 \triangleq 0$$

也是正常返不可约马氏链，其转移阵为

$$g(\boldsymbol{P}) \quad (\boldsymbol{P}\text{ 为 } \xi_n \text{ 的转移阵}),$$

而且 X_n 与 ξ_n 有相同的平稳分布.

62. 设 S_0 为正常返不可约马氏链 ξ_n 的状态空间的 $\mathscr{S}$ 非空真子集. 记 ξ_n 的转移阵按 S_0 的分块为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} P_0 & U \\ V & R \end{pmatrix}$$

令 σ_0 为首达 S_0 的时刻$(\triangleq \inf\{n \geqslant 0, \xi_n \in S_0\})$，

$$\sigma_{n+1} = \inf\{k > \sigma_n ; \xi_k \in S_0\},$$

求证 ξ_{σ_n} 也是正常返不可约马氏链，其转移阵为

$$P_0 + U\left(\sum_{n=0}^{\infty} R^n\right)V,$$

平稳分布为 ξ_n 的平稳分布在 S_0 上的限制.

63. 设

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ q & p_0 & p_1 & \cdots & \\ & q & p_0 & p_1 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (0 < q < 1),$$

求证对 $\forall\ i \geqslant 1$（第 1 个状态为 $i=0$），$f_{i0}^{*}=1$ 当且仅当 $\sum_{k=1}^{\infty} k p_k \leqslant q$.

64. 设 ξ_n 为有零均值非零有限方差 σ^2 的独立同分布列，η_n 是非负整值随机变量列，且满足

$$\frac{\eta_n}{n} \xrightarrow{p} \alpha > 0,$$

证明

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_{\eta_n}}{\sqrt{\eta_n}} \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2).$$

进而证明马氏链的函数型中心极限定理：设 X_n 是正常返不可约马氏链，其平稳分布为 π. 设 f 为 $\mathscr{S}$ 上函数，又设

$$\tau_j^{(0)} = 0,\ \ \tau_j^{(n)} = \inf\{k > \tau_j^{(n-1)}; X_k = j\},$$

$$\mu \triangleq E_{\pi} f(X_0) < \infty,$$

$$Y_m = \left(f\left(X_{\tau_j^{(m)}+1}\right) - \mu\right) + \cdots + \left(f\left(X_{\tau_j^{(m+1)}}\right) - \mu\right),$$

$$\sigma_0^2 \triangleq E_j Y_0^2 < \infty.$$

那末在 P_j 下当 $n \to \infty$ 时

$$\frac{\sum_{m=0}^{n}(f(X_m) - \mu)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, \pi_j \sigma_0^2).$$

提示：首先用平方可积的鞅的极值不等式(更确切地是 Kolmogorov 不等式)证明：对 $S_n \triangleq \xi_1+\cdots+\xi_n$ 有

$$\frac{S_{\tau_n}-S_{[n\alpha]}}{\sqrt{[n\alpha]}} \xrightarrow{p} 0.$$

由此证明第一部分. 进而利用 Y_n 是独立同分布的序列证明第二部分.

65. 设 X_n 是非齐次随机徘徊：

$$P\left(X_{n+1}=\begin{cases}k+1\\k-1\end{cases}\middle| X_n=k\right)=\begin{cases}p_k,\\1-p_k,\end{cases}$$

而$\tilde{X}_n$ 是随机徘徊：

$$P\left(\tilde{X}_{n+1}=\begin{cases}k+1\\k-1\end{cases}\middle| \tilde{X}_n=k\right)=\begin{cases}p,\\1-p.\end{cases}$$

设 $p_k\to p(k\to\pm\infty)$，求证 X_n 为常返、零常返的充要条件为$\tilde{X}_n$ 为常返、零常返.

66. 设 $\boldsymbol{P}_U$ 是转移阵在全体暂态集 U 上的限制，

$$\boldsymbol{N}\triangleq(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_U)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{P}_U^n(\triangleq(N_{ij}))\text{，}$$

则对于$\forall\ i,j\in U$ 有

$$N_{ii}=\frac{1}{1-f_{ii}^*},N_{ij}=\frac{f_{ij}^*}{1-f_{jj}^*}.$$

第四章 Q-过程

在许多物理、工程及其他应用问题中，我们常碰到“随机函数”，也即时间参数集是 $T=\boldsymbol{R}^+$ 或 $\boldsymbol{R}$ 的随机过程，例如，在第一章中的例 3(Poisson 过程). 事实上，大多数有随机噪声的控制设备或仪器的输出都是连续时间参数的随机过程. 当然，我们可以将时间参数离散化，即考虑它在一串时间 $\{t_0+n\Delta t; n=0,1,\cdots\}$ 上的值，而得到随机序列 $\{X_n; n=0,1,\cdots\}$. 不过这样做不仅有可能使我们忽略了原来系统的某种时间结构，而且有可能反而把以连续参数处理起来比较简单的问题复杂化了. 因此，我们这里有必要再讨论连续时间参数的马氏链.

§1 连续时间参数马氏链的转移密度阵

正如我们在 §3.1 中见到的，对于齐次离散参数马氏链，$\boldsymbol{P}(1)$ 就决定了一切转移概率阵：$\boldsymbol{P}(n)=(\boldsymbol{P}(1))^n$. 我们自然地会问，对连续时间参数的马氏链，是否有 $\boldsymbol{P}(t)=\mathrm{e}^{At}$？

我们都熟知：对于实函数 $\rho(t)=\mathrm{e}^{at}$，参数

$$a=\lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathrm{e}^{at}-1}{t}=\rho'(0+).$$

类似地，我们自然地猜到对矩阵阵函数 $\boldsymbol{P}(t)=\mathrm{e}^{At}$，$\boldsymbol{A}$ 是否应为

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\boldsymbol{P}(t)-\boldsymbol{I}}{t}?$$

先来看 Poisson 过程这个例子. 我们知道：

$$p_{ij}(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & \text{当 } j-i\geqslant 0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

于是

$$q_{ij} \triangleq \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t} = \begin{cases} \lambda, & 当\ j = i + 1; \\ -\lambda, & 当\ j = i; \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda t & \frac{(\lambda t)^2}{2!} & & \\ & 1 & \lambda t & \frac{(\lambda t)^2}{2!} & \\ & 0 & 1 & \lambda t & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} e^{-\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} D^k,$$

其中

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & 0 & \\ & 0 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (\lambda t)^s}{s!} D^k$$

$$\xlongequal{n=s+k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} n! D^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} (D - I)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & 0 & \\ & -1 & & 1 & \\ 0 & & -1 & & 1 \\ & & & & \ddots \ \ddots \end{pmatrix}^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n = e^{Qt} \quad (Q = (q_{ij})).$$

一般地，我们有以下定理：

定理 4.1 设转移阵 $\boldsymbol{P}(t)$满足条件

$$\lim_{t\downarrow 0}\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{I} \tag{4.1}$$

（其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位阵；满足条件(4.1)的转移阵 $\boldsymbol{P}$ 我们称为**标准的**），则

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{p_{ii}(t)-1}{t}=-q_i \quad (\triangleq q_{ii}) \tag{4.2}$$

存在，但可能无限；而

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}=q_{ij} \quad (i\neq j) \tag{4.3}$$

存在，且有限．而且

$$p_{ii}(t)>0 \quad (0\leqslant t<\infty).$$

证明 1) 先证(4.2)．由条件(4.1)易见 $p_{ij}(t)$右连续于$(0,+\infty)$上．又由于

$$\boldsymbol{P}(t)=\left(\boldsymbol{P}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n,\quad \boldsymbol{P}(s+t)=\boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{P}(t),$$

可见 $p_{ii}(s+t)\geqslant p_{ii}(s)p_{ii}(t)$，而且

$$p_{ii}(t)\geqslant\left(p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n>0\ (n\ 充分大).$$

因而对任意 $t>0$ 有 $p_{ii}(t)>0$．于是可以令 $\varphi(t)=-\log p_{ii}(t)$，有

$$\lim_{t\downarrow 0}\varphi(t)=0,\quad \varphi(s+t)\leqslant\varphi(s)+\varphi(t).$$

又令 $q_i=\sup\limits_{t>0}\dfrac{\varphi(t)}{t}$（可以取值$+\infty$），于是

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{\varphi(t)}{t}\leqslant q_i.$$

另一方面，存在 t_m 使

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\varphi(t_m)}{t_m}=q_i,$$

但是，对$\forall\ t$，存在 n_m 与 $0\leqslant\delta_m(t)<t$，使

$$t_m=n_mt+\delta_m(t).$$

于是

$$\lim_{t\downarrow 0}\delta_m(t) = 0, \qquad \lim_{t\downarrow 0}\varphi(\delta_m(t)) = 0,$$

而且

$$\frac{\varphi(t_m)}{t_m} \leqslant \frac{n_m\varphi(t) + \varphi(\delta_m(t))}{t_m} \leqslant \frac{\varphi(t)}{t} + \frac{\varphi(\delta_m(t))}{t_m}.$$

因而

$$\varliminf_{t\downarrow 0}\frac{\varphi(t)}{t} \geqslant \frac{\varphi(t_m)}{t_m} \to q_i \quad (\text{当 } m \to +\infty).$$

这样我们得到

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\varphi(t)}{t} = q_i.$$

进而有

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{-\log[1 - (1 - p_{ii}(t))]}{t}$$

$$= \lim_{t\downarrow 0}\frac{\varphi(t)}{t} = q_i.$$

2）现在我们来证明(4.3). 令

$$q_{ij} = \varliminf_{t\downarrow 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}. \tag{4.4}$$

由于 P 标准，我们对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $0<t_0<1$ 使得当 $t<t_0$ 有

$$p_{ji}(t) < \varepsilon, \quad p_{ii}(t) > 1 - \varepsilon, \quad p_{jj}(t) > 1 - \varepsilon.$$

首先证明：当 $0<nh<t_0$，有

$$\frac{p_{ij}(nh)}{nh} \geqslant (1 - 3\varepsilon)\frac{p_{ij}(h)}{h} \quad (i \neq j). \tag{4.5}$$

令

$${}_jp_{ik}^{(\nu)}(h) = P(X_{\nu h} = k;\quad X_{sh} \neq j,\ 0 \leqslant s \leqslant \nu - 1 | X_0 = i).$$

于是由

$$p_{ii}(\nu h) = {}_jp_{ii}^{(\nu)}(h) + \sum_{m=1}^{\nu-1} {}_jp_{ij}^{(m)}(h)p_{ji}((\nu - m)h)$$

就得到：当 $\nu h\leqslant nh<t_0$ 时，

$$ {}_jp_{ii}^{(\nu)}(h) \geqslant p_{ii}(\nu h) - \max_{1\leqslant m\leqslant \nu} p_{ji}(mh) > 1 - 2\varepsilon, $$

进而有，当 $nh<t_0$ 时，

$$ \begin{aligned} p_{ij}(nh) &\geqslant \sum_{\nu=0}^{n-1} {}_jp_{ii}^{(\nu)}(h)p_{ij}(h)p_{jj}((n-\nu-1)h) \\ &\geqslant (1-2\varepsilon)\sum_{\nu=0}^{n-1} p_{ij}(h)(1-\varepsilon) \\ &\geqslant n(1-3\varepsilon)p_{ij}(h). \end{aligned} $$

由此可见(4.5)成立.

现在来证明 $q_{ij}<+\infty$.

在(4.5)中，置 $h=\frac{t_0}{2n}$，令 $n\to+\infty$，就得到

$$ q_{ij} = \varliminf_{t\downarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{p_{ij}\left(\frac{t_0}{2n}\right)}{\frac{t_0}{2n}} \leqslant \frac{1}{1-3\varepsilon} \frac{p_{ij}\left(\frac{t_0}{2}\right)}{\frac{t_0}{2}} < +\infty. $$

最后我们来证明$\varlimsup\limits_{h\downarrow 0}\frac{p_{ij}(h)}{h}\leqslant q_{ij}$. 由(4.4)，存在 $0<t_1<\frac{t_0}{2}\leqslant \frac{1}{2}$，使

$$ \frac{p_{ij}(t_1)}{t_1} < q_{ij} + \varepsilon. $$

又由 $p_{ij}(t)$的右连续性，可找到 $h_0\in\left(0,\frac{t_0}{2}\right)$，使当 $0\leqslant t-t_1<h_0$ 时，$p_{ij}(t)<p_{ij}(t_1)+\varepsilon t_1$，于是这时

$$ \frac{p_{ij}(t)}{t} \leqslant \frac{p_{ij}(t_1)+\varepsilon t_1}{t_1} < q_{ij} + 2\varepsilon. \tag{4.6} $$

另一方面，对$\forall\ 0<h<h_0\wedge t_1$，存在 m，使

$$ t_1 \leqslant mh < t_1 + h_0 \leqslant \frac{t_0}{2} + \frac{t_0}{2} = t_0, $$

于是就可以利用(4.5)与(4.6)得到：当 $0<h<h_0\wedge t_1$ 时，

$$ \frac{p_{ij}(h)}{h} < \frac{1}{1-3\varepsilon}\frac{p_{ij}(mh)}{mh} < \frac{q_{ij}+2\varepsilon}{1-3\varepsilon}. $$

可见

$$\overline{\lim_{h \downarrow 0}} \frac{p_{ij}(h)}{h} \leqslant q_{ij} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} < +\infty.$$

综上所证结果，最后得到

$$q_{ij} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} < +\infty. \quad \blacksquare$$

推论 $0 \leqslant q_{ij} \leqslant q_i \leqslant +\infty$; $\sum_{j \neq i} q_{ij} \leqslant q_i$.

证明 推论是 Fatou 引理与定理的直接推论. ▌

注：上面的定理完全适用于准转移概率阵族 $\boldsymbol{P}(t)$. 也即上面的定理中条件 $\boldsymbol{P}(t)\mathbf{1}=\mathbf{1}$，可以改为 $\boldsymbol{P}(t)\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}$.

定义 4.1（Q-矩阵） 方阵 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$ 称为一个 Q-矩阵，如果满足条件

$Q.1)$ $q_{ii} = -q_i \leqslant 0$ （q_i 可以取 $+\infty$）；

$Q.2)$ $0 \leqslant q_{ij} < +\infty$ （$i \neq j$）；

$Q.3)$ $\sum_{j \neq i} q_{ij} \leqslant q_i$.

由上面的推论可以看出，对一个标准马氏链，矩阵 $(p'_{ij}(0+))$ 是一个 Q-矩阵，我们称之为此马氏链的 **Q-矩阵**.

定义 4.2（保守） 称一个 Q-矩阵（或马氏链的 Q-矩阵）保守，如果 $\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i < +\infty$.

定义 4.3（Q-过程） 对某个 Q-矩阵 $\boldsymbol{Q}$，若有马氏链使(4.2)，(4.3)满足，则称此马氏链为 $\boldsymbol{Q}$ 的 Q-过程.

命题 4.2 对有限状态马氏链，若其转移阵 $\boldsymbol{P}$ 标准，则它的 Q-矩阵一定保守，而且

$$\boldsymbol{P}'(t) = (p'_{ij}(t)) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t), \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{P}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}t}.$$

$$\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}$$

称为**前进方程**，而式

$$\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t)$$

称为**后退方程**. 而且 $q_{ij} \leqslant q_i < +\infty$.

证明 由

$$\frac{1}{h}(p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)) = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}(t) \frac{p_{kj}(h) - \delta_{kj}}{h}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{p_{ik}(h) - \delta_{ik}}{h} p_{kj}(t),$$

再令其中 $h \downarrow 0$, 就立即得到(4.7). 此外, 容易验证: 常微分方程组

$$\begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{P}}'(t) = \widetilde{\boldsymbol{P}}(t)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{P}}(t), \\ \widetilde{\boldsymbol{P}}(0) = \boldsymbol{I} \end{cases}$$

存在唯一解

$$\boldsymbol{P}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}t} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \boldsymbol{Q}^k.$$

所以由(4.7), 就立即得到 $\boldsymbol{P}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}t}$. ▌

推论 任给有限维保守 Q-矩阵 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$, 一定存在唯一的一族转移阵 $\{\boldsymbol{P}(t); t \in \boldsymbol{R}^+\}$, 使得

$$\boldsymbol{P}'(0+) \triangleq (p_{ij}'(0+)) = \boldsymbol{Q}.$$

事实上, 取 $\boldsymbol{P}(t) = \mathrm{e}^{t\boldsymbol{Q}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \boldsymbol{Q}^k$ 即可.

应该指出: 对一般可数状态马氏链, 前进方程与后退方程并不一定成立. 但可以证明, 对保守马氏链, 后退方程一定成立. 至于给了 Q-矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 是否存在 Q-过程的问题, 在下节中我们将作进一步的讨论. 一般来说对某一个固定的 Q-矩阵 $\boldsymbol{Q}$, Q-过程并不一定唯一. 这些问题, 由于篇幅所限, 我们不在这里一一讨论了. 希望进一步了解这方面问题的读者, 可以参考[Y], [H], [W$_1$]等专著.

下面讨论 Q-矩阵元素的概率意义.

$\boldsymbol{Q}$ 的元素 q_{ij} 有明确的概率意义, 它们可以使我们对于连续参数马氏链的统计性质有进一步深入、具体的了解. 本段就着重讨论这个问题.

令 $\tau = \inf\{t > 0; \xi_t \neq i\}$, 当 $\xi_0 = i$ 时, τ 就是 ξ_t 首次离开 i 的时

间. 由下面定理 4.3 的 1)容易看出,当$\{\xi_t(\omega);t\in \boldsymbol{R}^+\}$对 t 右连续时,$q_i=0$ 当且仅当 i **是吸收态**:$P_i(\xi_t=i(\forall\ t))=1$;$q_i\neq 0$ 时

$$\{\omega:\tau(\omega)>t\}=\{\omega:\forall\ s\leqslant t \text{ 使 } \xi_s(\omega)=i\}\in \mathscr{F}_t.$$

下面我们证明,τ 的分布由 q_i 决定,而且 ξ_t 首次离开 i,立即跳到 j 去的概率是 q_{ij}/q_i.

定理 4.3 设马氏链 $\xi=\{\xi_t,t\in \boldsymbol{R}^+\}$的轨道右连续(也就是 $P(\omega: \lim\limits_{t\downarrow s}\xi_t(\omega)=\xi_s(\omega),\forall\ s)=1$,且 $0\leqslant q_i<\infty$,则有

1) $P(\tau>t\,|\,\xi_0=i)=\mathrm{e}^{-q_it}$;

2) $P(\xi_\tau=j,\ \tau\leqslant s\,|\,\xi_0=i)=(1-\mathrm{e}^{-sq_i})\dfrac{q_{ij}}{q_i}$ ($j\neq i$ 且 $q_i\neq 0$ 时);

3) $P(\xi_\tau=j\,|\,\xi_0=i)=\dfrac{q_{ij}}{q_i}$ ($j\neq i$ 且 $q_i\neq 0$ 时).

可见,当 ξ 是保守 Q-过程时,τ 与 ξ_τ 在 $\xi_0=i(\forall\ i)$的条件下独立.

证明 1) 利用轨道右连续性,有

$$p_{ii}(t)=P(\xi_t=i\,|\,\xi_0=i)\to 1\ (t\to 0),$$

可知 $\boldsymbol{P}(t)$是标准的,再用轨道的右连续性,容易看出:

$$\begin{aligned}
P(\tau\geqslant t\,|\,\xi_0=i)&=P(\xi_s=i;\ 0<s<t\,|\,\xi_0=i)\\
&=P(\xi_{\frac{kt}{2^n}}=i;\ \forall\ n \text{ 及 } k=1,2,\cdots,2^n-1\,|\,\xi_0=i)\\
&=\lim_{n\to\infty}P(\xi_{\frac{kt}{2^n}}=i;\ k=1,2,\cdots,2^n-1\,|\,\xi_0=i)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(p_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n-1}\\
&=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{\log p_{ii}\left(\dfrac{t}{2^n}\right)}{\dfrac{t}{2^n}}\cdot\frac{2^n-1}{2^n}t\right]=\mathrm{e}^{-q_it}.
\end{aligned}$$

2) 首先,由 1)可见

$$p_i(\tau=s,\ \xi_\tau=j)\leqslant P(\tau=s)=0.$$

令
$$\tau_n(\omega)=\inf\left\{\frac{k}{2^n}:\xi_{\frac{k}{2^n}}(\omega)\neq\xi_0\right\}.$$

显然，$\tau \leqslant \tau_n \downarrow (n \uparrow)$，设其极限为 $\tilde{\tau}$，则 $\tau \leqslant \tilde{\tau}$，而且

$$\xi_{\frac{k}{2^n}}(\omega) = i, \text{ 对 } \forall \ \frac{k}{2^n} < \tilde{\tau}(\omega) \text{ 成立.}$$

从而由轨道右连续性得到

$$\xi_t(\omega) = i, \text{ 对 } \forall \, t < \tilde{\tau}(\omega) \text{ 成立.}$$

这意味着 $\tau \geqslant \tilde{\tau} \geqslant \tau$，即 $\tau = \tilde{\tau} = \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n$，而且

$$1_{\{j\}}(\xi_\tau) = \lim_{n\to\infty} 1_{\{j\}}(\xi_{\tau_n}),$$

那末

$$\begin{aligned}P_i(\tau \leqslant s, \, \xi_\tau = j) &= P_i(\tau < s, \, \xi_\tau = j) = \lim_{n\to\infty} P_i(\tau < s, \, \xi_{\tau_n} = j) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} P_i(\tau_n \leqslant s, \, \xi_{\tau_n} = j) \leqslant \lim_{n\to\infty} P_i(\tau \leqslant s, \, \xi_{\tau_n} = j) \\ &= P_i(\tau \leqslant s, \, \xi_\tau = j).\end{aligned}$$

可见

$$\begin{aligned}P_i(\tau \leqslant s, \, \xi_\tau = j) &= \lim_{n\to\infty} P_i(\tau_n \leqslant s, \, \xi_{\tau_n} = j) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu \leqslant 2^n s} P_i\left(\tau_n = \frac{\nu}{2^n}, \xi_{\frac{\nu}{2^n}} = j\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu \leqslant 2^n s} P_i\left(\xi_{\frac{\mu}{2^n}} = i, \xi_{\frac{\nu}{2^n}} = j, \text{ 对 } \forall \ \mu < \nu\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu \leqslant 2^n s} \left(p_{ii}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^{\nu} p_{ij}\left(\frac{1}{2^n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(p_{ii}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^{2^n s}}{1 - p_{ii}\left(\frac{1}{2^n}\right)} p_{ij}\left(\frac{1}{2^n}\right) \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-q_i s}) \frac{q_{ij}}{q_i}.\end{aligned}$$

3) 再在 2)中，令 $s \to \infty$，就得到 3). ▌

上面这个定理告诉我们，在定理的条件下，在一个状态 i 停留的时间遵从以 q_i 为参数的负指数分布. 当 $q_i = 0$，我们有

$$P(\tau \geqslant t \,|\, \xi_0 = i) = \mathrm{e}^{-q_i t} = 1.$$

这时 i 为吸收态；当 $q_i=+\infty$，对$\forall\ t>0$，$P(\tau\geqslant t|\xi_0=i)=0$，也就是 $P(\tau=0|\xi_0=i)=1$. 这说明 ξ 在 i 几乎不逗留，这时称 i 为**瞬时态**；当 $0<q_i<+\infty$时，i 称为**逗留态**. 下面我们将只讨论逗留状态的马氏链.

§2 连续参数马氏链的强马氏性、嵌入链与 Q-过程的最小解

1. 强马氏性

正如 §3.2 中指出的，在许多情况下，强马氏性很重要，这里我们给出一个简单然而十分常见的连续参数马氏链具有强马氏性的条件.

定理 4.4 设马氏链 $\xi=\{\xi_t;\ t\in\boldsymbol{R}^+\}$的轨道右连续，则它是强马氏的.

证明 我们对任意的停时 τ，考查在$\{\omega:\ \tau<+\infty\}$上是否成立等式

$$E[1_{\{\xi_{t+\tau}=j\}}|\mathscr{F}_\tau]=P_{\xi_\tau j}(t)\ \text{(a.e.)}.$$

事实上，取

$$\tau_n=t\left(\left[\frac{2^n\tau}{t}\right]+1\right)\Big/2^n\downarrow\tau,$$

于是 τ_n 是取值于$\left\{\dfrac{k}{2^n}t:\ k=1,2,\cdots\right\}$中的停时，而且

$$(\{\xi_{\frac{k}{2^n}t},\mathscr{F}_{\frac{k}{2^n}t};\ k=1,2,\cdots\})$$

是一个离散参数马氏链，由命题 3.11，它又是强马氏的，那么对$\forall\ A\in\mathscr{F}_\tau\subset\mathscr{F}_{\tau_n}$，就应有

$$E(1_A1_{\{\xi_{t+\tau_n}=j\}})=E(1_AP_{\xi_{\tau_n}j}(t)).\tag{4.8}$$

又由于 ξ 的轨道右连续(a.e.)，而且 $\xi_{t+\tau_n}\in\boldsymbol{Z}$，因而对固定的 $\omega\in\Omega$，当 n 充分大时，$\xi_{\tau_n(\omega)}(\omega)=\xi_{\tau(\omega)}(\omega)$，于是当 n 充分大，有

$$p_{\xi_{\tau_n}j}(t) = P_{\xi_\tau j}(t),$$

即
$$\lim_{n\to\infty} P_{\xi_{\tau_n(\omega)}j}(t) = P_{\xi_{\tau(\omega)}j}(t) \ (\text{a. e. }).$$

由有界收敛定理，在(4. 8)中令 $n\to\infty$，就得到

$$E(1_A 1_{\{\xi_{t+\tau_n}=j\}}) = E(1_A P_{\xi_\tau j}(t)),$$

于是就有

$$E(1_{\{\xi_{t+\tau}=j\}}|\mathscr{F}_\tau) = P_{\xi_\tau j}(t)),$$

强马氏性得证. ▌

命题 4.5 设 $\xi=\{\xi_t;\ t\in \boldsymbol{R}^+\}$是 Q 保守的，无吸收态的轨道右连续的马氏链. 令

$$t_0 = 0 \text{ 与 } t_k = \inf\{t > t_{k-1};\ \xi_t \neq \xi_{t_{k-1}}\};$$

再令

$$\eta_n = \xi_{t_n},$$

则$\{\eta_n\}$是马氏链(称为 ξ 的**嵌入链**)，而且它的转移概率阵是

$$\boldsymbol{P}(1) = ((1-\delta_{ij})q_{ij}/q_i),$$

其中 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$是 $\xi=\{\xi_t, t\in \boldsymbol{R}^+\}$的 Q-矩阵.

证明 由于 ξ 的轨道右连续，容易得到

$$\lim_{t\downarrow 0} p_{ij} = \delta_{ij}.$$

于是，由定理 4.1 得到 ξ 是一个 Q-过程，设其 Q-矩阵为 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$. 又由强马氏性，对 $t>0$，

$$E(1_{\{\xi_{t_n+t}=j\}}|\mathscr{F}_{t_n}) = E(1_{\{\xi_{t_n+t}=j\}}|\xi_{t_n}).$$

再由测度论典型方法，容易证明，对$\forall\ A\in\sigma(\xi_{t_n+t};\ t\geqslant 0)$有

$$E(1_A|\mathscr{F}_{t_n}) = E(1_A|\xi_{t_n}).$$

另一方面，$\xi_{t_{n+1}}\in\sigma(\xi_{t_n+t};\ t>0)$，可见

$$E(1_{\{\xi_{t_{n+1}}=j\}}|\mathscr{F}_{t_n}) = E(1_{\{\xi_{t_{n+1}}=j\}}|\xi_{t_n}) = E(1_{\{\xi_{t_{n+1}}=j\}}|\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n}).$$

因此，$\{\xi_{t_n};\ n\geqslant 0\}$是马氏链，而且

$$E(1_{\{\xi_{t_{n+1}}=j\}}|\xi_{t_n}=i) = P(\text{首次离开 } i \text{ 时到 } j|\xi_0=i)$$

$=q_{ij}/q_i$ （由定理 4.3）. ▌

命题 4.6 在定理 4.3 的条件下，若令

${}^{(n)}p_{ij}(t)=P(\xi_\cdot(\omega)$在$[0,t]$恰跳了 n 次，且 $\xi_t(\omega)=j|\xi_0=i)$，

则

$$ {}^{(0)}p_{ij}(t) = \mathrm{e}^{-q_i t}\delta_{ij}, $$

$$ {}^{(n)}p_{ij}(t)= \sum_{k\neq i}\int_0^t \mathrm{e}^{-q_i s}q_{ik}\,{}^{(n-1)}p_{kj}\,(t-s)\mathrm{d}s \tag{4.9-1} $$

$$ = \sum_{k\neq j}\int_0^t {}^{(n-1)}p_{ik}\,(t-s)\,q_{kj}\,\mathrm{e}^{-q_j s}\,\mathrm{d}s. \tag{4.9-2} $$

又令 $f_{ij}(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}{}^{(k)}p_{ij}(t)$，则

$$ f_{ij}(t)= P(\xi_t = j, \lim_{n\to\infty}t_n(\omega) > t\,|\,\xi_0 = i) $$

$$ = P(\xi_t = j, \xi_\cdot(\omega)\ \text{在}[0,t]\ \text{中跳有限次}\ |\xi_0 = i). $$

证明 这里我们沿用命题 4.5 的记号. 由于

${}^{(n)}p_{ij}(t)=P(\xi_\cdot$ 在$[0,t]$内跳 n 次，$\xi_t=j|\xi_0=i)$

$=E(t_1\leqslant t;\ P(\xi_\cdot$ 在$(t_1,t]$内跳 $n-1$ 次，$\xi_t=j|\mathscr{F}_{t_1})|\xi_0=i)$，

由强马氏性，上式应等于

$E(t_1\leqslant t;\ P(\xi_\cdot$ 在$(t_1,t]$ 内跳 $n-1$ 次，$\xi_t = j|\xi_{t_1})|\xi_0 = i)$.

再利用定理 4.3 中所得到的 t_1 与 ξ_{t_1} 的联合分布，上式应为

$$ \sum_{k\neq i}\int_0^t \mathrm{e}^{-q_i s}q_{ik}\,{}^{(n-1)}p_{kj}(t-s)\mathrm{d}s. $$

此即(4.9-1). 下面我们用归纳法证明(4.9-2). 对 $n=1$，由(4.9-1)我们有

$$ {}^{(1)}p_{ij}(t)= \sum_{k\neq i}\int_0^t \mathrm{e}^{-q_i u}q_{ik}\mathrm{e}^{-q_k(t-u)}\delta_{kj}\mathrm{d}u= \sum_{k\neq j}\int_0^t \mathrm{e}^{-q_i u}\delta_{ik}q_{kj}\mathrm{e}^{-q_j(t-u)}\mathrm{d}u $$

$$ = \sum_{k\neq j}\int_0^t {}^{(0)}p_{ik}(u)q_{kj}\mathrm{e}^{-q_j(t-u)}\mathrm{d}u. $$

设(4.9-2)对 n 成立，则由(4.9-1)及归纳法假设，我们有

$$ {}^{(n+1)}p_{ij}(t)= \sum_{k\neq j}\int_0^t \mathrm{e}^{-q_i u}q_{ik}\,{}^{(n)}p_{kj}(t-u)\mathrm{d}u $$

$$= \sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i u} q_{ik} \sum_{l\neq j}\int_0^{t-u} {}^{(n-1)}p_{kl}(t-u-s) q_{lj} e^{-q_j s} ds du$$

$$= \sum_{l\neq j}\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i u} q_{ik} \int_0^{t-u} {}^{(n-1)}p_{kl}(t-u-s) q_{lj} e^{-q_j s} ds du$$

$$= \sum_{l\neq j}\int_0^t e^{-q_j s} q_{lj} \sum_{k\neq i}\int_0^{t-s} {}^{(n-1)}p_{kl}(t-s-u) q_{ik} e^{-q_i u} du ds$$

$$= \sum_{l\neq j}\int_0^t e^{-q_j s} q_{lj}\, {}^{(n)}p_{il}(t-s) ds.$$

于是由归纳法得到(4.9-2)成立.

本命题的其它结论是明显成立的. ▌

我们将$\lim\limits_{n\to\infty} t_n(\omega)$记为$\eta(\omega)$,它表示$\xi_\cdot(\omega)$的第一个飞跃点(跳无穷次),在$[0,\eta(\omega))$上,$\xi_\cdot$是阶梯函数:

$$\xi_t(\omega) = \xi_{t_n(\omega)}(\omega),\ 当\ t_n(\omega) \leqslant t < t_{n+1}(\omega).$$

关于第一个飞跃点$\eta(\omega)$,我们有下面的命题.

命题 4.7 设 $q_i \leqslant M < +\infty\ (\forall\ i)$,则

$$P_i(\eta(\omega) = +\infty) = 1. \tag{4.10}$$

证明 令 $\tau_{n+1} = t_{n+1} - t_n$. 由定理 4.3 立刻得到

$$\begin{aligned} P(\omega:\ \tau_n(\omega) > \delta) &= E(E(\omega:\ \tau_n(\omega) > \delta | \mathscr{F}_{t_n})) \\ &= E(P(\omega:\ \tau_n(\omega) > \delta | \xi_{t_n})) \\ &= E\left(e^{-\delta q_{\xi_{t_n}}}\right) \geqslant e^{-\delta M}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} P(\eta(\omega) = +\infty) &\geqslant P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{\omega:\ \tau_k(\omega) > \delta\}\right) \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}} P(\omega:\ \tau_n(\omega) > \delta) \geqslant e^{-\delta M} \to 1\ (\delta \downarrow 0), \end{aligned}$$

即 $P(\eta(\omega) = +\infty) = 1$. ▌

由命题 4.6 与 4.7,我们可以看出,$\{q_i\}$有界的右连续马氏链$\xi = \{\xi_t;\ t \in \boldsymbol{R}^+\}$,几乎全部轨道是阶梯函数,在每个跳点上,由 i 出发的条件下,跳到 j 去的概率是 q_{ij}/q_i,而起跳时间的条件分布密

度是 $q_i e^{-q_i t}$.

2. Q-过程的构造，最小解

本段讨论由 Q-矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 去求 Q-过程的问题. 从上段的结果可以看出矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 能够且可以完全决定 $\eta(\omega)$以前 $\xi_t(\omega)$的统计性质. 如果我们使过程在时间 $\eta(\omega)$终止，就可以得到一个准马氏链(定义见下面).

定义 4.4(准马氏链与准转移阵)　若$\{\boldsymbol{P}(t);\ t\in\boldsymbol{R}^+\}$满足条件

$P.1)''$ $p_{ij}(t)\geqslant 0$, $\boldsymbol{P}(t)\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1}$

与方程

$P.2)''$ $\boldsymbol{P}(s+t)=\boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{P}(t)$,

则$\{\boldsymbol{P}(t);\ t\in\boldsymbol{R}^+\}$称为一个准转移阵族；$\xi=\{\xi_t;\ t\in\boldsymbol{R}^-\}$称为准马氏链，若它具有马氏性，且$\{\boldsymbol{P}(t);\ t\in\boldsymbol{R}^+\}$是准转移阵族(其中，$\boldsymbol{P}(t)=(p_{ij}(t))$，$p_{ij}(t)=P(\xi_{t+s}=j\,|\,\xi_s=i)$).

定理 4.8(最小解的构造)　设 $\boldsymbol{Q}$ 是一个保守的 Q-矩阵，则存在一个准转移阵族$\{\boldsymbol{F}(t)=(f_{ij}(t));\ t\in\boldsymbol{R}^+\}$与准马氏链，使得对 $\forall\ t\in\boldsymbol{R}^+$，满足

$$\boldsymbol{F}'(t)=\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{Q}\ (\text{前进方程}), \tag{4.11}$$

$$\boldsymbol{F}'(t)=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}(t)\ (\text{后退方程}), \tag{4.12}$$

与
$$\boldsymbol{F}(0)=\boldsymbol{I}=\lim_{t\downarrow 0}\boldsymbol{F}(t),$$

并且任何满足后退方程(4.12)的准转移阵族 $\boldsymbol{P}(t)$都使

$$f_{ij}(t)\leqslant p_{ij}(t). \tag{4.13}$$

(由于(4.13)，我们也称$\{\boldsymbol{F}(t),t\in\boldsymbol{R}^+\}$是最小解，它对应的准马氏链称为最小过程.)

证明　1) 构造 $\boldsymbol{F}(t)$的想法是：如果过程在 $\eta(\omega)$前构造好了，按命题 4.6，若将过程在 $\eta(\omega)$截止，则所得的转移概率$f_{ij}(t)$应与命题 4.6 所得出的一致. 因而，我们令

$${}^{(0)}p_{ij}(t)=e^{-q_i t}\delta_{ij},$$

$$^{(n)}p_{ij}(t) = \sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i s}q_{ik}\ ^{(n-1)}p_{kj}(t-s)\mathrm{d}s\ (n \geqslant 1),$$

$$^{(n)}f_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{n}\ ^{(k)}p_{ij}(t),$$

我们有

$$^{(0)}f_{ij}(t) = \ ^{(0)}p_{ij}(t), \quad \sum_j\ ^{(0)}f_{ij}(t) = e^{-q_i t} \leqslant 1.$$

再令

$$f_{ij}(t) = \lim_{n\to\infty}\ ^{(n)}f_{ij}(t),\ \boldsymbol{F}(t) = (f_{ij}(t)).$$

显然

$$f_{ij}(t) \geqslant 0, \text{且 } f_{ij}(t) = e^{-q_i t}\delta_{ij} + \sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i s}q_{ik}f_{kj}(t-s)\mathrm{d}s.$$

下面来证明,这样定义的$\{f_{ij}(t)\}$恰好满足定理要求,从而知道满足上面定义中的等式的$(^{(n)}p_{ij})$是由q_{ij}唯一决定的.

先用归纳法证明:$\sum_j\ ^{(n)}f_{ij}(t) \leqslant 1\ (\forall\ n)$. 显然此式当$n=0$时成立,设它对$n$时成立,于是

$$\sum_j\ ^{(n+1)}f_{ij}(t) = e^{-q_i t} + \sum_j\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i s}q_{ik}\ ^{(n)}f_{kj}(t-s)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant e^{-q_i t} + \sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i s}q_{ik}\mathrm{d}s$$

$$= e^{-q_i t} + \int_0^t e^{-q_i s}q_i\mathrm{d}s = 1.$$

此外,

$$\lim_{t\downarrow 0}f_{ij}(t) = \lim_{t\downarrow 0}\left(e^{-q_i t}\delta_{ij} + \sum_{k\neq i}q_{ik}\int_0^t e^{-q_i s}f_{kj}(t-s)\mathrm{d}s\right)$$

$$= \delta_{ij} + \sum_{k\neq i}q_{ik}\lim_{t\downarrow 0}\int_0^t e^{-q_i s}f_{kj}(t-s)\mathrm{d}s \text{ (有界收敛)}$$

$$= \delta_{ij} = f_{ij}(0).$$

再用归纳法证明 Kolmogorov 方程满足. 显然

$$^{(0)}p_{ij}(t+s) = e^{-q_i(t+s)}\delta_{ij} = \sum_l e^{-q_i t}\delta_{il}\delta_{lj}e^{-q_l s}$$

$$= \sum_{l} {}^{(0)}p_{il}(t)\, {}^{(0)}p_{lj}(s).$$

又设

$$ {}^{(n)}p_{ij}(s+t) = \sum_{v=0}^{n} \sum_{l} {}^{(v)}p_{il}(t)\, {}^{(n-v)}p_{lj}(s), \qquad (4.14)$$

则

$$\begin{aligned}
&{}^{(n+1)}p_{ij}(s+t) \\
&= \sum_{k\neq i} \left(\left(\int_0^t + \int_t^{t+s} \right) (\mathrm{e}^{-q_i\tau} q_{ik}\, {}^{(n)}p_{kj}(t+s-\tau)\mathrm{d}\tau) \right) \\
&= \sum_{k\neq i} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-q_i\tau} q_{ik}\, {}^{(n)}p_{kj}(t+s-\tau)\mathrm{d}\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^s \mathrm{e}^{-q_i(t+\tau)} q_{ik}\, {}^{(n)}p_{kj}(s-\tau)\mathrm{d}\tau \right) \\
&= \sum_{k\neq i} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-q_i\tau} q_{ik} \sum_{l} \sum_{v=0}^{n} {}^{(v)}p_{kl}(t-\tau)\, {}^{(n-v)}p_{lj}(s)\mathrm{d}\tau \right) \\
&\quad + {}^{(n+1)}p_{ij}(s)\mathrm{e}^{-q_i t} \\
&= \sum_{l} \left(\delta_{il}\mathrm{e}^{-q_i t}\, {}^{(n+1)}p_{lj}(s) + \sum_{v=0}^{n} {}^{(v+1)}p_{il}(t)\, {}^{(n-v)}p_{lj}(s) \right) \\
&= \sum_{l} \sum_{v=0}^{n+1} {}^{(v)}p_{il}(t)\, {}^{(n+1-v)}p_{lj}(s).
\end{aligned}$$

由归纳法得(4.14)对一切 n 成立，因而

$$\begin{aligned}
f_{ij}(s+t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{n} \sum_{l} {}^{(v)}p_{il}(t)\, {}^{(n-v)}p_{lj}(s) \\
&= \sum_{l} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} {}^{(v)}p_{il}(t)\, {}^{(m)}p_{lj}(s) \\
&= \sum_{l} f_{il}(t) f_{lj}(s).
\end{aligned}$$

综上所述，矩阵族$\{\boldsymbol{F}(t); t\in \boldsymbol{R}^+\}$是准转移阵族.

2) 现在来证明 $\boldsymbol{F}(t)$满足前进及后退方程. 由于

$$f_{ij}(t) = \mathrm{e}^{-q_i t}\delta_{ij} + \int_0^t \sum_{k\neq i} \mathrm{e}^{-q_i\tau} q_{ik} f_{kj}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= e^{-q_i t}\delta_{ij} + \int_0^t \sum_{k\neq i} e^{-q_i(t-s)} q_{ik} f_{kj}(s)\mathrm{d}s.$$

对上式两边求导就得到

$$f'_{ij}(t) = -q_i\left(e^{-q_i t}\delta_{ij} + \int_0^t \sum_{k\neq i} e^{-q_i(t-s)} q_{ik} f_{kj}(s)\mathrm{d}s\right) + \sum_{k\neq i} q_{ik} f_{kj}(t)$$

$$= -q_i f_{ij}(t) + \sum_{k\neq i} q_{ik} f_{kj}(t) = \sum_{k} q_{ik} f_{kj}(t),$$

此即后退方程. 进而还可以看出 $f'_{ij}(t)$ 对 t 连续.

由(4.9-2),我们有

$$^{(n)}p_{ij}(t) = \sum_{k\neq j}\int_0^t e^{-q_j s} q_{kj}\ ^{(n-1)}p_{ik}(t-s)\mathrm{d}s. \qquad (4.15)$$

对(4.15)求和,我们就得出

$$f_{ij}(t) = e^{q_j t}\delta_{ij} + \sum_{k\neq j}\int_0^t e^{-q_j s} q_{kj} f_{ik}(t-s)\mathrm{d}s$$

$$= e^{-q_j t}\delta_{ij} + \sum_{k\neq j}\int_0^t e^{-q_j(t-s)} q_{kj} f_{ik}(s)\mathrm{d}s$$

$$= e^{-q_j t}\delta_{ij} + e^{-q_j t}\int_0^t \sum_{k\neq j} e^{q_j s} q_{kj} f_{ik}(s)\mathrm{d}s. \qquad (4.16)$$

对(4.16)两边求导,就得到

$$f'_{ij}(t) = -q_j e^{-q_j t}\delta_{ij} - q_j e^{-q_j t}\int_0^t \sum_{k\neq j} e^{q_j s} q_{kj} f_{ik}(s)\mathrm{d}s$$

$$+ e^{-q_j t} e^{q_j t}\sum_{k\neq j} q_{kj} f_{ik}(t)$$

$$= -q_j f_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} q_{kj} f_{ik}(t) = \sum_{k} f_{ik}(t))q_{kj}.$$

3) 最小性. 设有准马氏链 $\{\boldsymbol{P}(t); t\in \boldsymbol{R}^+\}$ 满足后退方程且标准,则对后退方程积分得

$$p_{ij}(t) = e^{-q_i t}\delta_{ij} + \sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} p_{kj}(s)\mathrm{d}s.$$

于是可用归纳法证明 $p_{ij}(t) \geqslant {}^{(n)}f_{ij}(t)$. 首先,

$$p_{ij}(t) \geqslant {}^{(0)}f_{ij}(t);$$

又设 $p_{ij}(t) \geqslant {}^{(n)}f_{ij}(t)$,则

$$p_{ij}(t) \geqslant e^{-q_i t}\delta_{ij} + \sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik}\, {}^{(n)}f_{kj}(s)\mathrm{d}s = {}^{(n+1)}f_{ij}(t).$$

于是由归纳法得对一切 n，$p_{ij}(t) \geqslant {}^{(n)}f_{ij}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_{ij}(t)$. ▌

注：定理 4.8 的证明说明，最小解就是在飞跃点截止的过程.

推论 满足向后方程组的标准 Q-过程唯一的充要条件是：$\sum_j f_{ij}(t) = 1\ (\forall\, i)$；这个条件也等价于

$$P(\eta(\omega) = +\infty) = 1$$

($\eta(\omega)$是第一个飞跃点，称为过程的**灭绝时间**).

证明 充分性：若有 $p_{ij}(t) \geqslant f_{ij}(t)$，则

$$1 \geqslant \sum_j p_{ij}(t) \geqslant \sum_j f_{ij}(t) = 1,$$

可见

$$f_{ij}(t) = p_{ij}(t).$$

必要性：证明的要点是：当 $\sum_j f_{i_0 j}(t_0) < 1$ (对某 i_0, t_0)，要设法构造一个准标准 Q-过程 $\boldsymbol{P} = (p_{ij}(t))$ 使得 $f_{i_0 j}(t) < p_{i_0 j}(t)$. 我们采用 Doob 构造 $\boldsymbol{P}$ 的基本思想. 由于 $\sum_j f_{i_0 j}(t) < 1$，可见

$$P_{i_0}(\eta(\omega) < +\infty) \geqslant P_{i_0}(\eta(\omega) \leqslant t_0) = 1 - \sum_j f_{i_0 j}(t_0) > 0.$$

于是，在 $\eta(\omega)$以后，让过程独立于过去的历史，按某一个分布 $\underset{\sim}{\pi}$ 重新开始，这样在 $\omega \in \{\eta(\omega) < +\infty\}$上，在 $\boldsymbol{F}(t)$灭绝后，$\boldsymbol{P}$ 继续存在. 因而，存在 t_0, i, j 使 $f_{ij}(t_0) < p_{ij}(t_0)$.

下面我们给出严格证明. 令

$\widetilde{\mathscr{S}} = \{\mathscr{S}, \partial\}$(即在原状态空间 $\mathscr{S}$ 中加入一个"死亡"状态 ∂)，

$$\tilde{f}_{ij}(t) = \begin{cases} f_{ij}(t), & i, j \in \mathscr{S}; \\ 1 - \sum\limits_{j\in E} f_{ij}(t), & j = \partial, i \in \mathscr{S}; \\ 1, & i = \partial, j = \partial; \\ 0, & i = \partial, j \in \mathscr{S}. \end{cases}$$

于是容易验证$(\tilde{f}_{ij}(t))=\tilde{F}(t)$是一个标准的转移阵，因而可以构造一个$\zeta=\{\zeta_t;t\geqslant0\}$以$\{\tilde{F}(t)\}$为转移阵族. 由于$\tilde{F}(t)$是标准的，$\zeta$也是一个$Q$-过程，再令

$$\xi_t=\begin{cases}\zeta_t(\omega), & \text{当 } t<\eta(\omega);\\ \zeta^{(1)}_{t-\eta(\omega)}(\theta_\eta\omega), & \text{当 } t\geqslant\eta(\omega),\end{cases}$$

其中$\theta_\eta\omega=\{\omega_{\eta(\omega)+t};t\geqslant0\}$，$\zeta^{(1)}_t$是以$\underset{\sim}{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\cdots)$为初分布，$\tilde{F}(t)$为转移阵与$\zeta$独立的马氏链. 这样在$\mathscr{S}$上去看$\{\xi_t\}$，"$\xi_t=\partial$"就是它灭绝了. 事实上对$\forall\ i,j\in\mathscr{S}$

$$\begin{aligned}p_{ij}(t_0+\delta)&\triangleq P(\xi_{t_0+\delta}=j|\xi_0=i)\\&=P(\zeta_{t_0+\delta}=j|\zeta_0=i)+P(\eta(\omega)\leqslant t_0+\delta,\xi_{t_0+\delta}=j|\zeta_0=i)\\&\geqslant f_{ij}(t)+P(\eta(\omega)\leqslant t_0+\delta,\xi_{t_0+\delta}(\omega)=j|\zeta_0=i).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_j(p_{ij}(t)-f_{ij}(t))&\geqslant P(\eta(\omega)\leqslant t_0,\xi_{t_0+\delta}(\omega)\neq\partial|\zeta_0=i)\\&\geqslant P(\eta(\omega)\leqslant t_0,\zeta^{(1)}_{t_0-\eta+\delta}(\theta_\eta\omega)\neq\partial|\zeta_0=i)\\&\geqslant P(\eta(\omega)\leqslant t_0,\zeta^{(1)}_\delta(\theta_\eta(\omega))\neq\partial|\zeta_0=i)\\&=P_i(\eta(\omega)\leqslant t_0)P(P(\zeta^{(1)}_\delta(\omega)\neq\partial|\zeta^{(1)}_0))\\&=P_i(\eta(\omega)\leqslant t_0)\Big(\sum_j\sum_k\pi_kf_{kj}(\delta)\Big)>0.\end{aligned}$$

可见，适当选择$\underset{\sim}{\pi}$，就使

$$\sum_j p_{ij}(t)>\sum_j f_{ij}(t),$$

因而所要求的$\boldsymbol{P}(t)$构造成功. 重复上面的构造法，可以可列次地接上独立的新过程. 由于这可列个新过程独立同分布，由大数律可知这可列个灭绝时间的和必为$+\infty$(a. e.)，因而如上可列次地接上新过程后所得的过程必是一个马氏链，即

$$\sum_j p_{ij}(t)=1.$$

对于Q-过程也可类似第三章§1，相应地考虑状态分类、常返

性，只是命题 3.2 中 3)中的求和应改为积分(见本章习题). 此外，Q-过程的不变测度、遍历极限等问题，只要考虑其嵌入链，在很广条件下，能给出相应结论.

§3 对称性与可逆性

1. 对称性与可逆性的概念

马氏过程的可逆性是指过程的统计规律在时间倒逆下的不变性. 将可逆性的概念略加推广，就得到对称性的概念，而后者正是泛函分析中自共轭算子与半群的概率版本. 对称过程具有许多特殊性质，以便于我们对问题的处理. 本节介绍可逆马氏链及对称马氏链的概念及重要性质，并以求不变测度为例，说明怎样利用对称性与可逆性来研究问题.

定义 4.5(可逆性) 随机过程 $\xi=\{\xi_t;t\in T\}$ 称为可逆的，如果对任意的 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n\in T$，总有

$$t_k^-\triangleq t_1+t_n-t_k\in T\ (k=1,2,\cdots,n),$$

而且 $(\xi_{t_1},\xi_{t_2},\cdots,\xi_{t_n})$ 与 $(\xi_{t_1^-},\xi_{t_2^-},\cdots,\xi_{t_n^-})$ 具有相同的概率分布.

考虑以 $\boldsymbol{P}(t)$ 为转移阵族的马氏链 ξ. 我们有以下命题.

命题 4.9 马氏链 $\xi=\{\xi_t;t\in T\}$ $(T\subset\boldsymbol{R}^+)$ 可逆当且仅当它是平稳的，而且

$$\mu_i p_{ij}(t)=\mu_j p_{ji}(t)\ (\forall\ i,j\in\mathscr{S},t\in T),\qquad(4.17)$$

其中 $\mu=\{\mu_i;i\in\mathscr{S}\}$ 是 ξ 的平稳初分布.

证明 当 ξ 可逆，在定义 4.5 中取 $n=2$，就得到对 $\forall\ t_1,t_1+t\in T$，应有

$$P(\xi_{t_1}=i,\xi_{t_1+t}=j)=P(\xi_{t_1+t}=i,\xi_{t_1}=j),\qquad(4.18)$$

因而

$$P(\xi_{t_1}=i)=P(\xi_{t_1+t}=i).$$

可见 ξ 是平稳马氏链. 将 $P(\xi_t=i)$ 记为 μ_i，进而再利用(4.18)就得

到(4.17).

反之,若(4.17)成立,则对$\forall\ 0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n\in T$有

$$\begin{aligned}
&P(\xi_{t_1}=i_1,\xi_{t_2}=i_2,\cdots,\xi_{t_n}=i_n)\\
&=\mu_{i_1}p_{i_1i_2}(t_2-t_1)p_{i_2i_3}(t_3-t_2)\cdots p_{i_{n-1}i_n}(t_n-t_{n-1})\\
&=p_{i_2i_1}(t_2-t_1)\mu_{i_2}p_{i_2i_3}(t_3-t_2)\cdots p_{i_{n-1}i_n}(t_n-t_{n-1})\\
&=\cdots=p_{i_2i_1}(t_2-t_1)p_{i_3i_2}(t_3-t_2)\cdots p_{i_ni_{n-1}}(t_n-t_{n-1})\mu_{i_n}\\
&=P(\xi_{t_n+t_1-t_n}=i_n)p_{i_ni_{n-1}}(t_n-t_{n-1})\cdots p_{i_2i_1}(t_2-t_1)\\
&=P(\xi_{t_n+t_1-t_n}=i_n,\xi_{t_n+t_1-t_{n-1}}=i_{n-1},\cdots,\xi_{t_n+t_1-t_1}=i_1)\\
&=P(\xi_{t_1}^-=i_1,\xi_{t_2}^-=i_2,\cdots,\xi_{t_n}^-=i_n).
\end{aligned}$$

因此ξ是可逆的. ▌

在物理上,称满足(4.17)的过程为细致平衡的,意思是经过任何时间t,对任意一对状态(i,j),从i到j的概率$\mu_ip_{ij}(t)$总应与从j到i的概率$\mu_jp_{ji}(t)$一样.

推论1 对于一个马氏链ξ,若存在概率测度μ使(4.17)成立,则μ一定是不变测度,以它为初分布就使这个马氏链变成平稳的.

证明 对(4.17)两边对j求和就得到

$$\sum_j\mu_ip_{ij}(t)=\sum_j\mu_jp_{ji}(t),$$

左边的和是μ_i,所以上式就是

$$\sum_j\mu_jp_{ji}(t)=\mu_i.$$

可见μ是不变测度,以μ为初分布,ξ就是平稳的,由定理它也是可逆的. ▌

推论2 当$T=\mathbf{Z}^+$,ξ可逆当且仅当

$$\mu_ip_{ij}(1)=\mu_jp_{ji}(1)\ (\forall\ i,j\in\mathscr{S}),\qquad(4.19)$$

其中$\mu_i=P(\xi_0=i)$.

证明 只需证明(4.19)的充分性.让我们用归纳法来证明(4.17)对一切$t\in T=\mathbf{Z}^+$成立.当$t=1$,(4.17)即(4.19),显然成

立. 设 $\mu_i p_{ij}(n)=\mu_j p_{ji}(n)$成立，于是

$$\mu_i p_{ij}(n+1) = \sum_k \mu_i p_{ik}(1) p_{kj}(n) = \sum_k p_{ki}(1) p_{jk}(n) \mu_j$$
$$= \mu_j p_{ji}(n+1).$$

于是由归纳法及推论 1 就得到：(4.19)蕴含 ξ 可逆. ▌

把可逆性的概念略加推广，取消平稳性要求就得到了对称性的概念.

定义 4.6 设马氏链 ξ 以$\{\boldsymbol{P}(t)\}$为转移阵族，而且存在 σ-有限测度μ，使

$$\mu_i p_{ij}(t) = \mu_j p_{ji}(t) \ (\forall\, i,j \in \mathscr{S}, t \in T),$$

则称 ξ 是一个对称马氏链，μ称为它的对称化测度.

由此定义可见，当对称化测度是概率测度且是 ξ 的初分布时，ξ 亦可逆.

如果将$\{\boldsymbol{P}(t)\}$看成是一个算子半群. 则对称马氏链对应一个对称半群，具体地，我们令

$$P_t l = \Big(\sum_j p_{ij}(t) l_j ; i \in \mathscr{S} \Big) \ (l = (l_i ; i \in \mathscr{S})),$$

则 P_t 可以看作

$$l_2 \triangleq \Big\{ l = (l_i ; i \in \mathscr{S}) ; \| l \|^2 \triangleq \sum_i l_i^2 \mu_i < +\infty \Big\}$$

到它自身的算子半群：$P_{t+s} = P_t \circ P_s$. 这是因为

$$\sum_i \Big(\sum_j p_{ij}(t) l_j \Big)^2 \mu_i \leqslant \sum_i \sum_j p_{ij}(t) l_j^2 \mu_i = \sum_{ij} \mu_j l_j^2 \, p_{ji}(t)$$
$$= \sum_j l_j^2 \mu_j < +\infty, \tag{4.20}$$

与

$$\sum_k p_{ik}(t) \sum_r p_{kr}(s) l_r = \sum_r p_{ir}(t+s) l_r.$$

从 (4.20)还可以看出 P_t 是收缩算子，即 $\| P_t l \| \leqslant \| l \|$. 当 $\xi(\{\boldsymbol{P}(t)\})$是以$\mu$为对称化测度的对称马氏链，就有

$$(P_t l, l) = \sum_i \mu_i \sum_j p_{ij}(t) l_j l_i = \sum_j \mu_j l_j \sum_i p_{ji}(t) l_i = (l, P_t l),$$

可见 P_t 还是对称的. 由此可见,马氏链的对称性又是算子的对称性的概率版本.

例 1 一维随机徘徊:$\mathscr{S}=\{0,\pm1,\cdots\}$,令

$$p_{ij}(1)=\begin{cases}p_i, & j=i+1;\\ q_i, & j=i-1, \quad p_i+q_i=1;\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$\boldsymbol{P}(t)=(p_{ij}(t))$. $\{\boldsymbol{P}(t)\}$是对称的. 事实上,若令

$$\mu_i=\begin{cases}\prod_{k=0}^{i-1} p_k/q_{k+1}, & i>0;\\ 1, & i=0;\\ \prod_{k=i+1}^{0} q_k/p_{k-1}, & i<0.\end{cases}$$

则容易验证

$$\mu_i p_{ij}(1)=\mu_j p_{ji}(1).$$

例 2 (非对称马氏链) 考虑三状态马氏链,令

$$\boldsymbol{P}(1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

由命题 4.9 的推论 1,如果存在对称化测度μ,则它一定是$\boldsymbol{P}(1)$的唯一不变测度,即

$$\mu=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$

但是,

$$\mu_i p_{ii+1}-\mu_{i+1}p_{i+1i}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}>0.$$

由此可见 $\boldsymbol{P}$ 不可能对称.

前面我们讲到过，当 $\boldsymbol{P}$ 可逆时，它是**细致平衡**的，也就是说由任何一个状态 i 到另一状态 j 的“**纯概率流**”为零：

$$F_{ij}(t) \triangleq \mu_i p_{ij}(t) - \mu_j p_{ji}(t) = 0 \ (\forall\ i,j \in \mathscr{S}),$$

而当 $\boldsymbol{P}$ 非对称时则不然. 这时，如果 μ 是平稳分布，就意味着马氏链运动的每一步都保持每一状态 i 的概率不变. 我们自然地要问，这时这里能使概率不变的平衡又是如何维持的呢？下面的命题回答了这个问题.

命题 4.10 μ 是 $\{\boldsymbol{P}(t)\}$ 的不变测度，当且仅当

$$\sum_k \mu_k p_{ki}(t) = \sum_k \mu_i p_{ik}(t) \ (\forall\ t \in T, i \in \mathscr{S}), \quad (4.21)$$

也即流入 i 的总概率等于流出 i 的总概率，它又等价于从 i 出发的总纯概率流

$$\sum_k F_{ik}(t) = 0.$$

证明 注意到(4.21)右端为 μ_i，本命题是显然的. ▌

2. 对称马氏链的对称化测度与不变测度

马氏链的对称化测度一定是不变测度；而不可约常返对称马氏链的不变测度也一定是对称化测度. 然而对称化测度比不变测度更容易处理，其原因有二：第一，对称化测度可以用转移阵的元素的显式表示，而一般地，不变测度很难做到这点；第二，当我们将马氏链限制在它的状态空间 $\mathscr{S}$ 的真子集 $\mathscr{S}_0$ 中，也就是将在 $\mathscr{S}_0$ 之外的每一个状态都改为“反射壁”，而得到一个新的马氏链，对于对称马氏链，则新旧马氏链具有“相同的”对称化测度. 但一般地，这样得到的新马氏链未必与原来的马氏链有“相同的”不变测度.

注：这里的反射壁与前面的随机徘徊中的反射壁略有不同，区别是这里的反射壁设于两状态之间，而那里的反射壁设于边界状态上.

命题 4.11 设对称马氏链以 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$ 为一步转移阵，μ 为对称化测度，令 $\widetilde{\boldsymbol{P}}=(\widetilde{p}_{ij})_{i,j\in\mathscr{S}_0}$ $(\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S})$，其中

$$\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} p_{ij}, & i \neq j \in \mathscr{S}_0; \\ p_{ii} + \sum\limits_{k \in \mathscr{S}_0} p_{ik}, & i = j \in \mathscr{S}_0. \end{cases}$$

则 $\tilde{\boldsymbol{P}}$ 以 $\tilde{\mu} = \{\mu_i, i \in \mathscr{S}_0\}$ 为对称化测度，$\tilde{\mu}$ 也是 $\tilde{\boldsymbol{P}}$ 的不变测度.

证明 显然 $\tilde{\boldsymbol{P}}$ 仍是一个随机阵，而且 $\tilde{p}_{ij} = p_{ij} (i \neq j)$，因而

$$\mu_i \tilde{p}_{ij} = \mu_j \tilde{p}_{ji} \quad (\forall\ i, j \in \mathscr{S}_0),$$

所以 $\tilde{\mu}$ 是 $\tilde{\boldsymbol{P}}$ 的对称化测度，也是不变测度. ▌

下面的例子说明，当 $\boldsymbol{P}$ 不对称，$\tilde{\boldsymbol{P}}$ 可能与 $\boldsymbol{P}$ 有不同的不变测度.

例 3 在例 2 中，取 $\mathscr{S}_0 = \{1, 2\} \subset \mathscr{S} = \{1, 2, 3\}$. 于是按命题 4.11 方法得到

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{P}$ 的不变测度是 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$，而

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \tilde{\boldsymbol{P}} = \left(\frac{1}{6}, \frac{3}{6}\right),$$

可见原不变测度在 $\mathscr{S}_0$ 上的限制不再是不变测度.

由定义直接判别一个马氏链是否对称（或可逆）是困难的. 下面的定理 4.12（由 Kolmogorov 于 1935 年给出）提供了一个可执行的对称性判别法.

定理 4.12 互通马氏链 $\xi = \{\xi_n; n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 是对称的，当且仅当对任意一个状态的环路 $i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_s \to i_1$ 永远有等式

$$p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_{s-1} i_s} p_{i_s i_1} = p_{i_1 i_{s-1}} p_{i_{s-1} i_{s-2}} \cdots p_{i_2 i_1} p_{i_1 i_s} \tag{4.22}$$

成立. 这时对称化测度可取为：

$$\mu_{i_0} = 1,$$

$$\mu_i = \prod_{k=0}^{n} \frac{p_{j_k j_{k+1}}}{p_{j_{k+1} j_k}} \quad (i \neq i_0), \tag{4.23}$$

其中 $j_0=i_0, j_{n+1}=i, p_{i_0 j_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_n i}>0$，而且 μ_i 的值与 $n, j_1, \cdots, j_n$ 的选取无关.

证明 1) 若 ξ 对称，μ是对称化测度，则

$$\mu_i p_{ij} = \mu_j p_{ji} \quad (\forall\ i,j \in \mathscr{S}).$$

又由于 ξ 是互通的，若 $\mu_{i_0}>0$，对$\forall\ j\neq i_0\in\mathscr{S}$，必存在 $k>0$，使得

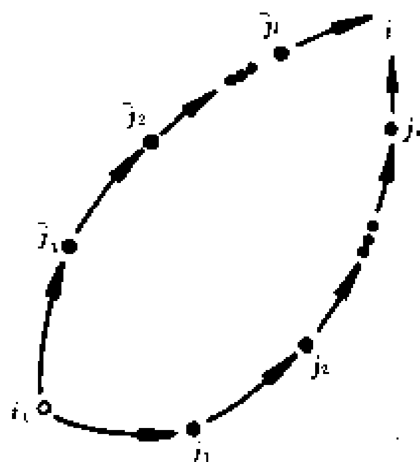
$$0 < \mu_{i_0} p_{i_0 j}(k) = \mu_j p_{j i_0}(k),$$

可见 $\mu_j>0$，从而可知：互通马氏链的对称化测度一定恒不为 0. 任取一个环路 $i_1\to i_2\to\cdots\to i_s\to i_1$，就得到

$$\mu_{i_1} p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_s i_1} = p_{i_2 i_1} \mu_{i_2} p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_s i_1} = \cdots = p_{i_2 i_1} p_{i_3 i_2} \cdots p_{i_1 i_s} \mu_{i_1},$$

由于 $\mu_{i_1}>0$，上式等价于(4.22).

2) 当(4.22)对任一环路成立，任意先取定一个状态 $i_0\in\mathscr{S}$，取 $\mu_{i_0}=1$. 对$\forall\ i\in\mathscr{S}$，由互通性，必能找到 $j_1, \cdots, j_n$ 使(4.23)的分母不为 0，就可按(4.23)定义 μ_i. 事实上，这个定义并不因为 $j_1, \cdots, j_n$ 的选取不同而异. 首先让我们证明：按两条不同路径定义时(4.23)的分子也都不为 0. 这是因为由 i 一定能



有一条路 $i\to i_1\to\cdots\to i_m\to i_0$ 使 $p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_m i_0}>0$. 于是我们就得到了两个环路 $i_0\to j_1\to j_2\to\cdots\to j_n\to i\to i_1\to\cdots\to i_m\to i_0$ 与 $i_0\to\tilde{j}_1\to\tilde{j}_2\to\cdots\to\tilde{j}_l\to i\to i_1\to\cdots\to i_m\to i_0$. 对它们分别应用(4.22)式就得到转移概率沿两个反环路的积也都是严格正的. 再用(4.22)于环路 $i_0\to j_1\to j_2\to\cdots\to j_n\to i\to\tilde{j}_l\to\tilde{j}_{l-1}\to\cdots\to\tilde{j}_2\to\tilde{j}_1\to i_0$，就得到

$$\prod_{k=0}^{n}\frac{p_{j_k j_{k+1}}}{p_{j_{k+1} j_k}}\Bigg/\prod_{k=0}^{l}\frac{p_{\bar{j}_k \bar{j}_{k+1}}}{p_{\bar{j}_{k+1}\bar{j}_k}}=\frac{p_{i_0 j_1}\cdots p_{j_n i}p_{i\bar{j}_l}p_{\bar{j}_l\bar{j}_{l-1}}\cdots p_{\bar{j}_2\bar{j}_1}p_{\bar{j}_1 i_0}}{p_{i_0\bar{j}_1}\cdots p_{\bar{j}_l i}p_{i j_n}\cdots p_{j_2 j_1}p_{j_1 i_0}}=1.$$

至此，我们完好地定义了 $\mu_i>0$，并说明了 μ_i 的定义与 $j_1,\cdots,j_n,n$ 的选取无关. 下面来证明 $\mu=\{\mu_i;i\in\mathscr{S}\}$是对称化测度. 由于

$$\mu_i p_{ij}=\frac{p_{i_0 j_1}p_{j_1 j_2}\cdots p_{j_n i}p_{ij}}{p_{j_1 i_0}p_{j_2 j_1}\cdots p_{i j_n}},\qquad \mu_j p_{ji}=\frac{p_{i_0 j'_1}p_{j'_1 j'_2}\cdots p_{j'_l j}p_{ji}}{p_{j'_1 i_0}p_{j'_2 j'_1}\cdots p_{j j'_l}},$$

以及(4.22)：

$$p_{i_0 j_1}p_{j_1 j_2}\cdots p_{j_n i}p_{ij}p_{j j'_l}p_{j'_l j'_{l-1}}\cdots p_{j'_2 j'_1}p_{j'_1 i_0}$$
$$=p_{j_1 i_0}p_{j_2 j_1}\cdots p_{i j_n}p_{ji}p_{j'_l j}p_{j'_{l-1} j'_l}\cdots p_{j'_1 j'_2}p_{i_0 j'_1}.$$

所以 $\mu_i p_{ij}=\mu_j p_{ji}$，即 μ的确是对称化测度. ▌

推论 互通对称马氏链的对称化测度 $\tilde{\mu}$恒正，而且在相差一个常数的意义下唯一.

证明 定理证明 1)中已经证明了 $\tilde{\mu}_i>0$ ($\forall\ i\in\mathscr{S}$). 另一方面，由对称性：$\tilde{\mu}_i p_{ij}=\tilde{\mu}_j p_{ji}$，我们立即得到

$$\tilde{\mu}_{i_0}p_{i_0 j_1}\cdots p_{j_n i}=\tilde{\mu}_i p_{i j_n}p_{j_n j_{n-1}}\cdots p_{j_1 i_0}.$$

可见

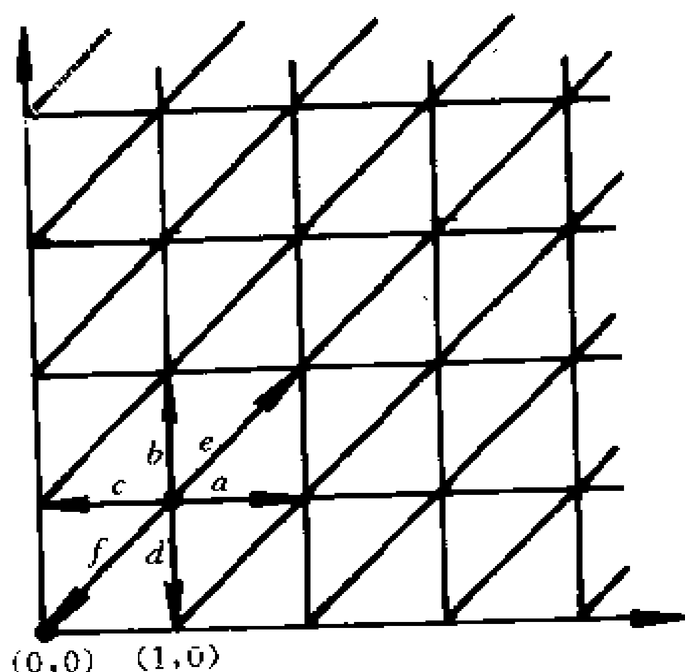
$$\frac{\tilde{\mu}_{i_0}}{\mu_{i_0}}=\frac{\tilde{\mu}_i}{\mu_i}\quad\left(\mu_{i_0}=1,\ \mu_i=\prod_{k=0}^{n}\frac{p_{j_k j_{k+1}}}{p_{j_{k+1} j_k}}\right).$$

即若取定 $\tilde{\mu}_{i_0}$，则 $\tilde{\mu}_i$ 唯一决定. ▌

例 4 考虑二维随机徘徊：$\mathscr{S}=(\mathbf{Z}^+)^2$.

$$p_{(i,k),(j,l)}=\begin{cases}a, & i+1=j,\ k=l;\\ b, & i=j,\ k+1=l;\\ c, & i-1=j,\ k=l;\\ d, & i=j,\ k-1=l;\\ e, & i+1=j,\ k+1=l;\\ f, & i-1=j,\ k-1=l;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

其中 $a+b+c+d+e+f=1$，$a<c$，$b<d$，$baf=ecd$.



不难验证定理 4.12 中的条件(4.22)满足，因而这是一个对称马氏链.

按照定理 4.12 中的方法，取 $i_0=(0,0)$，容易由归纳法定义

$$\mu_{(1,0)}=\frac{a}{c},\quad \mu_{(0,1)}=\frac{b}{d},$$

$$\mu_{(1,1)}=\frac{d}{f}=\frac{ab}{cd},\quad \mu_{(n,m)}=\left(\frac{a}{c}\right)^n\left(\frac{b}{d}\right)^m.$$

容易看出，$\mu=\{\mu_{(n,m)};(n,m)\in(^+\mathbf{Z})^2\}$是一个有限测度. 再令

$$\widetilde{\mu}_{(n,m)}=\frac{\mu_{(n,m)}}{\sum\limits_{n,m\geqslant 0}\mu_{(n,m)}}=\left(\frac{a}{c}\right)^n\left(\frac{b}{d}\right)^m\Big/\left(1-\frac{a}{c}\right)^{-1}\left(1-\frac{b}{d}\right)^{-1}$$

$$=\frac{a^nb^m(c-a)(d-b)}{c^{n+1}d^{m+1}},$$

就得到这个不可约马氏链的一个不变概率测度，并由此可见它是正常返的. $\widetilde{\mu}=(\widetilde{\mu}_{(n,m)};(n,m)\in(\mathbf{Z})^2)$是它的唯一不变概率测度.

3. Q-过程的对称性与可逆性

在命 4.9 的推论 2 中，我们看到要判别一个离散参数马氏链

是否对称，只要检查是否存在 $\mu=\{\mu_i;k\in\mathscr{S}\}$ 使

$$\mu_i p_{ij}(1)=\mu_j p_{ji}(1)\ (\forall\ i,j\in\mathscr{S}).$$

对于 Q-过程，我们很自然地希望将条件(4.17)简化为加在 Q-矩阵上的条件. 但是由于一般地 Q-矩阵并不能唯一地决定 Q-过程，所以自然地，我们还需附加 Q-过程的唯一性条件.

定理 4.13 设 ξ 是以 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$ 为密度阵的 Q-过程，而且它是对 $\boldsymbol{Q}$ 满足后退方程的唯一解，则 ξ 对称当且仅当存在 σ-有限测度 μ，使

$$\mu_i q_{ij}=\mu_j q_{ji}\quad(\forall\ i,j\in\mathscr{S}).\tag{4.24}$$

在条件成立下，μ就是 ξ 的一个对称化测度.

证明 在所设唯一性条件下，ξ(其转移阵族为$\{\boldsymbol{P}(t)\}$)是最小解，因而前进方程与后退方程都成立.

$$p'_{ij}(t)=\sum_k q_{ik}p_{kj}(t)=\sum_k p_{ik}(t)q_{kj}$$

于是，令

$$\widetilde{p}_{ij}(t)=\mu_j p_{ji}(t)/\mu_i,$$

$\widetilde{\boldsymbol{P}}(t)$应满足

$$\widetilde{p}'_{ij}(t)=\sum_k \mu_j p_{jk}(t)q_{ki}/\mu_i=\sum_k \frac{\mu_j p_{jk}(t)}{\mu_k}\frac{\mu_k q_{ki}}{\mu_i}=\sum_k q_{ik}\widetilde{p}_{kj}(t).$$

可见$(\widetilde{p}_{ij}(t))$满足后退方程. 由后退方程初值问题$(p_{ij}(0)=\delta_{ij})$解的唯一性得到

$$\widetilde{p}_{ij}(t)=p_{ij}(t).$$

即

$$\mu_j p_{ji}(t)=\mu_i p_{ij}(t)\ (\forall\ i,j\in\mathscr{S},t\in T).\ \blacksquare$$

注：当 $\sum\mu_i<\infty$ 时，ξ 为可逆.

推论 1 当 ξ 是有限状态 Q-过程，则 ξ 可逆当且仅当(4.24)成立.

推论 2 在定理的条件下，若 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$ 是互通的，即$\forall\ i,j\in\mathscr{S}$，$\exists\ i_1,i_2,\cdots,i_n$ 使

$$q_{ii_1}q_{i_1i_2}\cdots q_{i_{n-1}i_n}q_{i_nj}>0,$$

则 ξ 是对称的，当且仅当对任意一个状态的环路：$j_1\to j_2\to\cdots\to j_s\to j_1$ 都有如下等式成立：

$$q_{j_1j_2}q_{j_2j_3}\cdots q_{j_{s-1}j_s}q_{j_sj_1}=q_{j_sj_{s-1}}\cdots q_{j_3j_2}q_{j_2j_1}q_{j_1j_s}. \tag{4.25}$$

而且这时对称化测度可取为

$$\mu_{i_0}=1,$$

$$\mu_i=\prod_{k=1}^{n}\frac{q_{j_kj_{k+1}}}{q_{j_{k+1}j_k}},$$

其中 $j_{n+1}=i,j_1,\cdots j_n$ 只要选得使上式中分母不为 0 即可.

例 5（一维生灭过程） 令

$$q_{ij}=\begin{cases}a_i, & j=i+1;\\ b_i, & j=i-1;\\ -(a_i+b_i), & j=i;\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

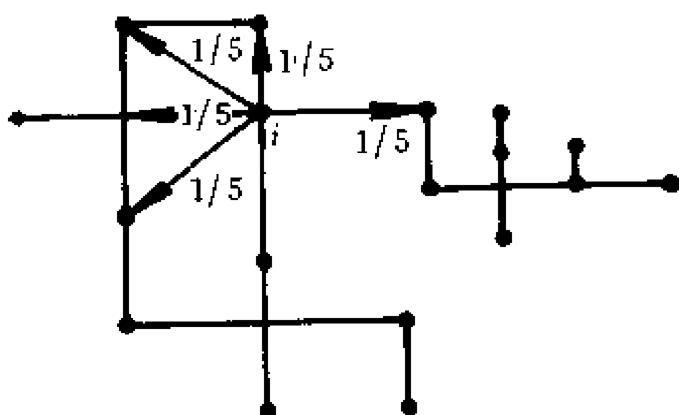
而且 $a_i+b_i\leqslant c,a_i,b_i>0,i,j=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

由于下面这样的基本环及它的反向环上的转移密度乘积不为 0：$R:i\to i+1\to i$，但在 R 上，我们有

$$\frac{q_{i\,i+1}q_{i+1\,i}}{q_{i+1,\,i}\,q_{i\,i+1}}=\frac{a_ib_{i+1}}{b_{i+1}a_i}=1.$$

可见定理 4.13 的推论 2 中条件(4.25)成立，因而以 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$ 为转移密度阵的生灭过程是对称的（请读者自己证明在本例的情况下，Q-过程是互通而且满足后退方程的 Q-过程是唯一的）.

例 6（网络上的均匀流） 设任给一个连通网络. 将它的全部结点取为状态空间. 令 $q_{ij}=0$，如果由 i 不经过其它状态不能到 j（我们称之为由 i 不能直接到 j）；又令 $q_{ij}=\dfrac{1}{m_i}$，如果由 i 可直接到 m_i 个状态. 于是 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$ 可唯一决定一个有限状态 Q-过程 ξ. 又由于从每个状态出发的不为 0 的 q_{ij} 都相等，而每一个不自交的环与其反向环上“流出”一个状态都恰为一次，所以不难得到(4.25)永



远成立.由定理 4.13 的推论 2,此 Q-过程是对称的.而且 $\mu_i = m_i$ 就是一个配称测度,再归一化就得到一个不变概率测度.

习　　题

1. 设 $\{\boldsymbol{P}(t); t \in \boldsymbol{R}^+\}$ 是一个有限维标准转移阵族,试证明 $\det\boldsymbol{P}(t) > 0$ (对$\forall\ t > 0$).

2. (简单排队模型中的生灭过程)一个简单服务系统中,每次至多 1 人接受服务,将在时刻 t 等待服务或接受服务的总人数记为 $\xi_t(\omega)$. 设在$[t, t+\Delta t)$时间内,有一位新顾客到达的概率是 $o(\Delta t) + \lambda\Delta t$,有一位以上顾客到达的概率是 $o(\Delta t)$,有一位顾客接受服务结束的概率是 $\beta\Delta t + o(\Delta t)$,有一位以上顾客接受服务结束的概率是 $o(\Delta t)$;此外新顾客的到来与接受服务的情况相互独立,因而在$[t, t+\Delta t)$中至少有一位顾客到来又至少有一位顾客结束服务的概率为 $\lambda\beta\Delta t^2 + o(\Delta t^2) = o(\Delta t)$. 试说明存在马氏链 $= \{\xi_t, t \in \boldsymbol{R}^+\}$ 及其转移函数族 $\{\boldsymbol{P}(t); t \in \boldsymbol{R}^+\}$,使得 $\xi_t(\omega)$正是上述排队系统中 t 时刻的等待与接受服务总人数(意即 ξ 的统计规律与后者完全相同),再说明它是 Q-过程并求出其 Q-矩阵.

3. 一个粒子通过防护层时以 $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$的概率发生碰撞;每次碰撞中又以概率 p_K变成 K 个同样的粒子($K = 1, 2, \cdots$). 新产生的粒子又以同样方式继续运动.设每个粒子从它产生以后就相互

独立地运动，而碰撞不占时间. 若将到 t 时为止的全部粒子总数记为 $\xi_t(\xi_0=1)$，试证明可以统计地把 $\{\xi_t;t\in \boldsymbol{R}^+\}$ 看作一个 Q-过程，并求出此 Q-过程的 Q-矩阵. 又问：这样并满足后退方程的 Q-过程的转移阵族唯一吗？为什么？

4. 设 $\boldsymbol{P}(t)$ 为标准的转移阵. 我们称从状态 i 可达 $j(\neq i)$，如果 $\exists\ t>0$ 使 $p_{ij}(t)>0$. 记成 $i\to j$. 与离散时间不同的是如今我们恒有 $i\to i$. 同理可定义互通.

(1) 先证明：$\forall\ i,j$ 给定时必存在 t_0，使

$$p_{ij}(t)>0\quad(t\geqslant t_0).$$

再用此事实证明：

$$\begin{aligned} i\to j &\Longleftrightarrow \forall\ h>0,\text{对转移阵 } \boldsymbol{P}^{(h)}\triangleq \boldsymbol{P}(h)\text{ 有 } i\to j\\ &\Longleftrightarrow \exists\ h>0,\text{对于 } \boldsymbol{P}^{(h)}\text{ 有 } i\to j. \end{aligned}$$

在 $\boldsymbol{P}(t)$ 为它的 Q-矩阵的唯一 Q-过程时，$i\to j\Longleftrightarrow$ 对嵌入链 $i\to j$.

(2) i 称为 $\boldsymbol{P}(t)$ 的常返态，如果对于 $\forall\ h>0$，i 是 $\boldsymbol{P}^{(h)}$ 的常返态. 类似地可定义正常返态及零态. 利用 $p_{ii}(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上严格正及连续性证明

$$\begin{aligned} i\text{ 常返}&\Longleftrightarrow\int_0^\infty p_{ii}(t)\mathrm{d}t=\infty\\ &\Longleftrightarrow\exists\ h>0,\ \sum_n p_{ii}(nh)=\infty. \end{aligned}$$

在 $\boldsymbol{P}(t)$ 是唯一的 Q-过程且互通时，i 常返 $\Longleftrightarrow i$ 是嵌入链的常返态.

提示：1° 用 ${}^{(n)}p_{ij}(t)$ 的表达式证必要性.

2° 用归纳法证明 $\int_0^\infty p_{ij}(t)\mathrm{d}t=\dfrac{\tilde{p}_{ij}^{(n)}}{q_j}$，其中 $\tilde{\boldsymbol{P}}^{(n)}$ 是嵌入链的 n 步转移阵.

5. 1° 对于标准的 $\boldsymbol{P}(t)$ 证明

$$\sum_j|p_{ij}(t+s)-p_{ij}(t)|\leqslant 2(1-p_{ii}(s)).$$

利用它及由定理 3.19 得到的 $\pi(h)\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{P}(nh)$ 的存在性，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{P}(t)$ 的存在性(由此可知 $\pi(h)$ 与 h 无关，记成 π).

2° i 为正常返$\Longleftrightarrow \pi_i(\triangleq \pi_{ii})>0$.

3° 在 Q-过程唯一而且不可约($P(t)$的状态互通)时，

$$P(t)\text{ 为正常返}\Longleftrightarrow \mu Q = 0 \text{ 有概率测度解 } \mu$$

$$\Longleftrightarrow P(t) \text{ 有平稳分布 } \mu.$$

提示：证最后一个等价式时，"$\Leftarrow$方向"用 Laplace 变换及前进方程的 Laplace 解；"$\Rightarrow$方向"用前进方程的迭代解.

4° 在 Q-过程唯一且不可约时，$P(t)$为常返则一定存在不变测变(但是可能不是有限的). 后者又等价于 $\mu Q=0$ 有非零非负解.

提示：等价关系中"$\Leftarrow$方向"部分可构造

$$p_{ij}^{-} \triangleq \frac{\mu_j}{\mu_i} p_{ji}(t_0) \quad (t_0 \text{ 固定}),$$

再用反证法.

6. 设随机变量 $T>0$ 与随机过程 $\xi=\{\xi_t;t\in \boldsymbol{R}^+\}$相互独立；又设 ξ 的轨道右连续. 试证明：$\xi_{T(\omega)}(\omega)$对 $\sigma(T)\times\sigma(\xi)$是可测的，而且有

$$E(\xi_{T(\omega)}(\omega)) = \int_0^\infty \mathrm{d}F(s)E(\xi_s(\omega))$$

(其中 $F(s)$是 T 的分布函数)，及

$$E(\xi_{T(\omega)}(\omega)) = E\left(\int_0^\infty \mathrm{d}F(s)E(\xi_s(\omega)\,|\,\xi_0)\right),$$

$$E(\xi_{T(\omega)}(\omega)\,|\,\xi_0) = \int_0^\infty \mathrm{d}F(s)E(\xi_s(\omega)\,|\,\xi_0).$$

7. 设 $\xi=\{\xi_t;t\in \boldsymbol{R}^+\}$是一个以 λ 为强度的 Poisson 过程，$\eta=\{\eta_t;t\in \boldsymbol{R}^+\}$是一个与 ξ 相互独立的 Q-过程，它的轨道右连续，它的 Q-矩阵是(q_{ij})，$P(\eta_0=K)=\mu_K$. 令：

$$T = \inf\{t>0;\eta_t\neq\eta_0\},$$

$$N = \#\{t:\ 0\leqslant t<T(\omega),\xi_t(\omega)\neq\xi_{t-}(\omega)\}.$$

试求：$P(N=n\,|\,\eta_0=i)$ 与 $P(N=n)$.

8. 设 $\xi=\{\xi_t;t\in \boldsymbol{R}^+\}$是一个 Poisson 过程，其强度为 λ. 令 $t_n(\omega)$是 $\xi_\cdot(\omega)$的第 n 次跳跃时间，$\tau_n=t_n-t_{n-1}$，试证明：

a) $\{\tau_n; n=1,2,\cdots\}$是独立同分布序列，并求出它们的公共分布；

b) 求证$t_n(\omega)$的分布密度是

$$f_{t_n}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0;\end{cases}$$

c) 对固定的$t>0$，设$n_t(\omega)$是$\xi_\cdot(\omega)$在t以前的跳跃次数，令

$$\varphi_t(\omega)=t_{n_t(\omega)+1}(\omega)-t,$$

$$\psi_t(\omega)=t-t_{n_t(\omega)}(\omega).$$

[illegible]φ_t，ψ_t相互独立，而且φ_t与$\tau_{n_t}\triangleq t_{n_t+1}-t_{n_t}$同分布，试求出$\varphi_t$，$\psi_t$的分布.

提示：考虑$E(\varphi_t(\omega)<t_1|\xi_t)=E(\varphi_t(\omega)<t_1|\mathscr{F}_t)$.

9. 试给出一个最小Q-过程但不满足$\sum_j f_{ij}(t)=1$的例子.

10. 试求线性纯生过程的最小解的转移阵族$\boldsymbol{P}(t)$（即$q_{ii+1}=b_i$，$q_{ii}=-b_i$（其中$b_i=ia+b_0$，$a>0$，$b_0\geqslant 0$）），并说明$\boldsymbol{P1}=\boldsymbol{1}$.

提示：利用最小解应满足前进方程与后退方程，并注意

$$p_{ij}(t)=0\ (\forall\ j<i).$$

11. 设有$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-b & b\\ d & -d\end{pmatrix}$（$b,d>0$），试求以$\boldsymbol{Q}$为$Q$-矩阵的$Q$-过程. 问是否唯一？

12. 设$\xi=\{\xi_t; t\in\boldsymbol{R}^+\}$是$\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$的$Q$-过程，满足前进方程；又设方程$\boldsymbol{Q}Y=\lambda Y$有有界解，试证明：若

$$Y=\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\\ \vdots\end{pmatrix},\quad \mathscr{F}_t=\sigma(\xi_s; s\leqslant t),$$

$$Z_t(\omega)=Y_{\xi_t(\omega)}e^{-\lambda t},$$

则$\{Z_t,\mathscr{F}_t\}$是鞅.

提示：$\boldsymbol{P}(t)e^{-\lambda t}Y=Y$.

13. 试求例 5 与例 6 中的对称化测度.

14. 设 $\boldsymbol{P}(t)$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 分别是有限马氏链的转移阵密度阵，则有 $\det\boldsymbol{P}(t)>0$，0 为 $\boldsymbol{Q}$ 的特征值，而其它特征值的实部为负.

15. 设

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta\end{pmatrix}\quad(\alpha+\beta>0),$$

求 $\boldsymbol{P}(t)$. 进而证明存在 t_0 使某个已知的

$$\begin{pmatrix}a & 1-a \\ 1-b & b\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}(t_0)\quad(0\leqslant a,b\leqslant 1)$$

的充要条件为 $a+b>1$. 又若已知有均匀的平稳分布，求 $\boldsymbol{P}(t)$.

16. 设 $\boldsymbol{P}(t)$ 为转移阵满足(4.1). 令

$$\boldsymbol{\Psi}(\lambda)\triangleq(\psi_{ij}(\lambda))\triangleq\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\boldsymbol{P}(t)\mathrm{d}t$$

那末有

(1) $\boldsymbol{\Psi}(\lambda)\geqslant 0$.

(2) $\lambda\boldsymbol{\Psi}(\lambda)\mathbf{1}=\mathbf{1}$.

(3) $\boldsymbol{\Psi}(\lambda)-\boldsymbol{\Psi}(\mu)+(\lambda-\mu)\boldsymbol{\Psi}(\lambda)\boldsymbol{\Psi}(\mu)=0$.

(4) $\lambda\boldsymbol{\Psi}(\lambda)\to\boldsymbol{I}\ (\lambda\to\infty)$.

(5) $\lambda(\lambda\boldsymbol{\Psi}(\lambda)-\boldsymbol{I})\to\boldsymbol{Q}\ (\lambda\to\infty)$，其中 $\boldsymbol{Q}$ 为 $\boldsymbol{P}(t)$ 的 Q-矩阵.

再进一步证明：$\boldsymbol{P}(t)$ 满足 Kolmogorov 后退方程的充要条件为

$$\psi_{ij}(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\psi_{kj}(\lambda)+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}\quad(\lambda>0,\forall\, i,j);$$

$\boldsymbol{P}(t)$ 满足 Kolmogorov 前进方程的充要条件为

$$\psi_{ij}(\lambda)=\sum_{k\neq j}\psi_{ik}(\lambda)\frac{q_{kj}}{\lambda+q_j}+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_j}\quad(\lambda>0,\forall\, i,j);$$

$\boldsymbol{P}(t)$ 是最小过程的充要条件是 $\psi(\lambda)$ 是上述两个(无穷维)线性方程组的最小解(迭代解).

17. 证明 Q-过程唯一的充要条件为

(1) $\boldsymbol{Q}$ 保守；

(2) $\begin{cases}(Q-\lambda)z=0, & \text{对}\forall\ \lambda>0\text{ 只有零解},\\ 0\leqslant z\leqslant \mathbf{1}.\end{cases}$

提示：证明 $\lambda\sum_j \psi_{ij}(\lambda)$ 是

$$y_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}y_k+\frac{\lambda}{\lambda+q_i}$$

的迭代解，即最小非负解. 从而 $1-\lambda\sum_j \psi_{ij}(\lambda)$ 是

$$\begin{cases} z_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}z_k-\sum_k\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\left(\text{在 }Q\text{ 保守时}=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}z_k\right),\\ 0\leqslant z\leqslant \mathbf{1}\end{cases}$$

的最大解.

18. 设 Q 保守，且嵌入链为常返，则 Q-过程唯一.

提示：设一切 $q_i>0$，z 为题 17 中的解，嵌入链的转移阵为 $\widetilde{P}$，证明

$$1\geqslant\sum_j\widetilde{p}_{ij}^{(n+1)}z_j\geqslant\lambda\sum_{k=0}^{n}\widetilde{p}_{ii}^{(k)}\frac{z_i}{q_i}.$$

19. Q-矩阵为如下形式的 Q-过程称为单边生灭过程：

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \\ & & \ddots & & \ddots \end{pmatrix}$$

$(\lambda_i,\mu_j\geqslant 0,i\geqslant 0,j\geqslant 1)$. 利用题 17 证明

1° 若 $\lambda_m=0$，则 17 题中的前 $n+1$ 个方程只有零解.

2° 若 $\{n:\lambda_n=0\}$ 是无限集，则 Q-过程唯一.

3° 若 $\{n:\lambda_n=0\}$ 是有限集，则 Q-过程唯一的充要条件是

$$\sum_{n_0}^{\infty}\left(a_n+b_na_{n-1}+\cdots+b_nb_{n-1}+\cdots+b_{n_0+1}a_{n_0}\right)=\infty,$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\lambda_n},\quad b_n=\frac{\mu_n}{\lambda_n}\ (n\geqslant n_0).$$

4° 纯灭过程必唯一($\lambda_n\equiv 0$)，纯生过程($\mu_n\equiv 0$)唯一的充要条

件为$\forall$ $n\geqslant 0$ 有 $\sum\limits_{n}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}=\infty$.

5° 生灭过程当 $\lambda_i,\mu_j>0(i\geqslant 0,j>1)$且满足 3°时,

$$\text{常返}\iff\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)\cdots\left(\frac{\mu_n}{\lambda_n}\right)<\infty,$$

$$\text{正常返}\iff\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}\right)\cdots\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\right)<\infty.$$

提示:3°的充分分性:利用 1°及 17 题解 z_i 是单调增列,设其第一个非零的是 z_N,证明

$$\sum_{n=k}^{\infty}(b_nb_{n-1}\cdots b_k)<\infty\ (k\leqslant N).$$

由此证明

$$\sum_{N+1}^{\infty}l_n=\infty,$$

其中

$$l_n=\begin{cases}a_N, & n=N;\\ a_n+b_na_{n-1}+\cdots+b_nb_{n-1}+\cdots+b_{N+1}a_N, & n>N.\end{cases}$$

另一方面,由 z 满足的方程有

$$z_{n+1}-z_n\geqslant\lambda l_nz_N.$$

这与 $\sum\limits_{N+1}^{\infty}l_n=\infty$ 矛盾,除非 $z=0$.

3°的必要性用反证法.这时必有

$$b\triangleq\sum_{n=n_0}^{\infty}b_nb_{n-1}\cdots b_{n_0}<\infty.$$

构造满足 17 题中方程的非零解 z 如下:

$$z_0=\cdots=z_{n_0}=0,$$

$$z_{n_0+1}=\mathrm{e}^{-(\lambda m+b)}.$$

在 $n>n_0+1$ 时用该方程归纳地确定 z_n,其中

$$m=a_{n_0}+\sum_{n_0+1}^{\infty}(a_n+b_na_{n-1}+\cdots+b_nb_{n-1}\cdots b_{n_0+1}a_{n_0}).$$

20. 若 $\boldsymbol{Q}$ 保守,$q_i=\lambda>0$,$\widetilde{p}_{ij}^{(n)}$是嵌入链的 n 步转移,则此 Q-过

程为

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij}^{(n)} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

21. 试推广习题 20 的表达式至 $q_i \leqslant \lambda(\forall\ i)$的情形(均匀化).

22. 设

$$\xi \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

N_t 为 Poisson 过程,ξ 与$\{N_t:t\geqslant 0\}$独立. 求证

$$X_t \triangleq \xi(-1)^{N_t}$$

为马氏链,求它的 Q-矩阵及平稳不变分布,并证明它是可逆的.

23. 设 X_t 为纯生准马氏过程,即 $q_{n,n+1}=\lambda_n, q_{n,n}=-\lambda_n$,证明 X_t 不断($P(X_t<\infty,\forall\ t>0)=1$)当且仅当

$$\sum_n \frac{1}{\lambda_n} < \infty.$$

24. 某通讯线路失效率为 λ,即正常工作时间为参数 λ 的指数分布. 失效后立刻修理,修复时间为参数 μ 的指数分布. 求证 t 时刻失效线路数目 N_t(取值 0 或 1)具 Q-矩阵:$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$,再求 N_t 的转移阵及不变分布.

第五章 Brown 运动

Brown 运动作为物理现象，首先由英国生物学家 Brown 于 1827 年观察花粉微粒在液面上的“无规则运动”而提出. Einstein 对这种“无规则运动”作了物理分析，并首次提出了 Brown 运动的数学模型，这正是在第一章里我们简单介绍过的 Brown 运动的概率模型. 这个模型给出了 Brown 运动应遵从的概率分布. Wiener，Levy 等人进一步研究了 Brown 运动的轨道性质. 这些性质异常深刻而奇特(例如，Brown 运动沿几乎所有的轨道都是处处连续而处处不可微的)，与以前分析学中常见的光滑函数迥然不同. Wiener 提出了在 Brown 运动轨道空间上定义测度与积分，从而形成了 Wiener 空间的概念. 此后对 Brown 运动及其泛函的研究深入发展，又逐渐渗透到概率论及数学分析的各个领域中去，成为现代概率论的重要基础.

我们从第一章已经知道，Brown 运动是一个具有连续时间参数和连续状态空间的随机过程. 事实上，它是这样的随机过程中最简单、最重要的特例. 许多不同类型的重要随机过程都可以看作它的泛函或某种意义下的推广. 然而它又是迄今我们研究得最多，了解得最清楚，性质最丰富的随机过程之一. 因此，认识并熟悉 Brown 运动的性质可以给其它较一般的随机过程的研究提供必要的感性认识与启迪. 从应用角度看，由于自然科学、工程技术、经济管理等广泛的领域中都有“噪声”与涨落现象存在，它们往往涉及 Brown 运动，也就需要 Brown 运动的理论；又由于 Brown 运动与热传导方程有密切的联系，使它成为概率论与分析联系的重要纽带；它还被用以作为概率论和数学其它分支研究的重要工具，例如六十年代中以来发展起来的以 Brown 运动研究极限定理的方

法(即所谓 Skorohod 嵌入与 Strassen 律等)与以 Brown 运动及多指标 Brown 运动研究调和分析,……. 总之,Brown 运动的理论是重要而基本的. 对 Brown 运动的研究至今仍在继续,这方面的研究成果十分丰富,我们在这里只能涉及基本的、较初等的部分.

§1 Brown 分布及其性质

1. Brown 分布

在第一章例 4 中我们已经导出了 Brown 运动是满足以下条件的随机过程 $\boldsymbol{B} \triangleq \{B_t; t \in \boldsymbol{R}^+\}$:

1) $B_{t_i} - B_{s_i}$ 对彼此不相交的区间 $(s_i, t_i]$ 是相互独立的;

2) $B_t - B_s$ 遵从正态分布 $N(0, t-s)$ $(s \leqslant t)$;

3) $B_t(\omega)$ 对 t 连续.

事实上,1),2)两条已决定了 $\boldsymbol{B}$ 的分布,3)不能完全由 $\boldsymbol{B}$ 的分布决定,我们将满足 1),2)两条的随机过程的分布称为 Brown 分布.

下面的命题给出了 Brown 分布的一个等价定义,在不少场合下,这个定义更易验证.

命题 5.1 设 $B_0 = 0$, $\boldsymbol{B} = \{B_t; t \in \boldsymbol{R}^+\}$ 遵从 Brown 分布当且仅当它是 Gauss 系,而且

$$\begin{aligned} EB_t &= 0, \\ E(B_t B_s) &= t \wedge s. \end{aligned} \tag{5.1}$$

证明 必要性:显然"$\boldsymbol{B}$ 是 Brown 分布的"蕴含它是 Gauss 系,而且

$$EB_t = E(B_t - B_0) = 0,$$

$$\begin{aligned} EB_t B_s &= \frac{1}{2} E(B_t^2 + B_s^2 - (B_t - B_s)^2) \\ &= \frac{1}{2}(t + s - |t - s|) = t \wedge s. \end{aligned}$$

充分性：当 $\boldsymbol{B}$ 是 Gauss 系，而(5.1)成立，就得到

$$E(B_t - B_s) = 0;$$

$$E(B_t - B_s)^2 = t + s - 2(t \wedge s) = |t - s|;$$

$$E\left(B_{t_1} - B_{s_1}\right)\left(B_{t_2} - B_{s_2}\right) = t_1 - s_1 - t_1 + s_1 = 0,$$

$$\forall s_1 < t_1 \leqslant s_2 < t_2.$$

可见，$B_t - B_s$ 遵从正态分布 $N(0, |t-s|)$，而且由于 Gauss 系中独立即不相关，$B_{t_1}-B_{s_1}, B_{t_2}-B_{s_2}, \cdots, B_{t_n}-B_{s_n}$ 对于 $\forall s_1<t_1\leqslant s_2<t_2\leqslant \cdots < t_{n-1} \leqslant s_n < t_n$ 都相互独立. ▌

命题 5.2 若 $B_0=0, \boldsymbol{B}=\{B_t; t\in \boldsymbol{R}^+\}$ 遵从 Brown 分布，则

1) $\{B_{t+\tau}-B_\tau; t\in \boldsymbol{R}^+\}$ 仍遵从 Brown 分布($\forall \tau \geqslant 0$)；

2) $\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}B_{\lambda t}; t\in \boldsymbol{R}^+\right\}$ 仍遵从 Brown 分布($\forall \lambda > 0$)；

3) $\{tB_{\frac{1}{t}}; t\in \boldsymbol{R}^+\}\left(tB_{\frac{1}{t}}\Big|_{t=0}\text{理解为 }0\right)$ 仍遵从 Brown 分布；

4) $\{B_{T-s}-B_T; 0\leqslant s\leqslant T\}$ 仍遵从 Brown 分布($T>0$)；

证明 由命题 5.1 及如下各等式，命题各结论显然成立：

$$E(B_{t+\tau} - B_\tau) = E\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}B_{\lambda t}\right) = E\left(tB_{\frac{1}{t}}\right)$$

$$= E(B_{T-s} - B_T) = 0,$$

$$E(B_{t+\tau} - B_\tau)(B_{s+\tau} - B_\tau)$$

$$= (t+\tau) \wedge (s+\tau) - \tau - \tau + \tau = t \wedge s,$$

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}B_{\lambda t}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}B_{\lambda s}\right) = \frac{1}{\lambda}(\lambda t \wedge \lambda s) = t \wedge s,$$

$$E\left(tB_{\frac{1}{t}}sB_{\frac{1}{s}}\right) = ts\left(\frac{1}{t} \wedge \frac{1}{s}\right) = ts\frac{1}{t \vee s} = t \wedge s,$$

$$E(B_{T-s} - B_T)(B_{T-t} - B_T)$$

$$= (T-s) \wedge (T-t) - (T-t) - (T-s) + T$$

$$= T - s \vee t + t + s - T = t \wedge s. ▌$$

命题 5.3 令 $\hat{\mathscr{F}}_0$ 是与 $\sigma(B_u; u\geqslant 0)$ 相互独立的 σ-代数，$\mathscr{F}_t \triangleq$

$\hat{\mathscr{F}}_0 \cup \sigma(B_u; u \leqslant t)$，则

1) $\{B_t, \mathscr{F}_t\}$是鞅；$\{B_t^2 - t; \mathscr{F}_t\}$是鞅；

2) $\left\{e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}, \mathscr{F}_t\right\}$是鞅；

3) $\left\{e^{i\lambda B_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t}, \mathscr{F}_t\right\}$是鞅(这里 $E(f+ig)$理解为 $Ef+iEg$).

证明 1)是显然的. 由于

$$E\left(e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t} \mid \mathscr{F}_s\right) = e^{\lambda B_s - \frac{1}{2}\lambda^2 t} E\left(e^{\lambda(B_t - B_s)} \mid \mathscr{F}_s\right)$$
$$= e^{\lambda B_s - \frac{1}{2}\lambda^2 t} E\left(e^{\lambda(B_t - B_s)}\right),$$

其中

$$E\left(e^{\lambda(B_t - B_s)}\right) = \int \frac{e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{\lambda x} dx = e^{\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)} \int \frac{e^{-\frac{(x-\lambda(t-s))^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} dx$$
$$= e^{\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)},$$

可见

$$E\left(e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t} \mid \mathscr{F}_s\right) = e^{\lambda B_s - \frac{1}{2}\lambda^2 t + \frac{1}{2}\lambda^2(t-s)} = e^{\lambda B_s - \frac{1}{2}\lambda^2 s},$$

因而$\left\{e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda t^2}, \mathscr{F}_t\right\}$是鞅.

又由

$$E\left(e^{i\lambda B_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t} \mid \mathscr{F}_s\right) = e^{i\lambda B_s + \frac{1}{2}\lambda^2 t} E\left(e^{i\lambda(B_t - B_s)} \mid \mathscr{F}_s\right)$$
$$= e^{i\lambda B_s + \frac{1}{2}\lambda^2 t} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)} = e^{i\lambda B_s + \frac{1}{2}\lambda^2 s},$$

可见$\left\{e^{i\lambda B_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t}, \mathscr{F}_t\right\}$也是鞅. ▌

上面这个命题中给出了三个与 Brown 运动有关的鞅，它们在随机分析的研究中起着重要作用.

注：事实上，2)与 3)都分别是$\{B_t\}$遵从 Brown 分布的充要条件.

2. Brown 运动的马氏性、转移函数与半群

由于 Brown 运动是时齐的独立增量过程，因而它也是时齐的马氏过程. 它的转移函数是 $p(t,x,A)$(即定义 1.4 中的转移概率族的时齐情形：$p(t,x,A) \triangleq p(s,x;t+s,A)$)

$$
\begin{aligned}
p(t,B_0,A) &\triangleq E(1_A(B_t)\,|\,\mathscr{F}_0) \\
&= E(1_A(B_t - B_0 + B_0)\,|\,\mathscr{F}_0)) \\
&= E(1_A(B_t - B_0 + x)\,|\,\mathscr{F}_0)\big|_{x=B_0} \quad (\text{因 } B_0 \in \mathscr{F}_0) \\
&= E(1_A(B_t - B_0 + x))\big|_{x=B_0} \\
&= \int 1_A(z+x)\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{d}z\bigg|_{x=B_0} \\
&= \int_A \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{d}y\bigg|_{x=B_0}.
\end{aligned}
$$

因而转移密度函数

$$
p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}.
$$

类似于 Q-过程，我们希望得到类似于 Q-矩阵那样的东西，以便刻画过程的转移函数. 为此考虑$\dfrac{\partial p(t,x,y)}{\partial t}$：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}\left(-\frac{1}{2t} + \frac{(y-x)^2}{2t^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

这两个方程对应于 Q-过程的后退方程与前进方程：

$$
\frac{\partial p_{ij}(t)}{\partial t} = \sum_k q_{ik}p_{kj}(t) = \sum_k p_{ik}(t)q_{kj}. \tag{5.3}
$$

但是这一对方程有了完全不同的形式. 为了使两者统一起来，我们引入半群及其生成元的概念.

设有时齐马氏过程 $\xi=\{\xi_t;t\in T\}$，以 $(\mathscr{S},\Sigma)$ 为其状态空间，以 $\{p(t,x,A)\}$ 为转移函数. 令

$$
\mathscr{B} = \{f:\mathscr{S}\to \boldsymbol{R}^1;f\text{ 有界可测}\},\ \|f\| = \sup_x|f(x)|,
$$

$$
\mathscr{M} = \{\mu:(\mathscr{S},\Sigma)\text{ 上的有限符号测度}\},\ \|\mu\| = \int|\mu|(\mathrm{d}x),
$$

再令

$$P_t f(x) = E_x(f(\xi_t)) = \int p(t,x,\mathrm{d}y)f(y), \qquad (5.4)$$

$$(P_t^* \mu)(A) = \int \mu(\mathrm{d}x)p(t,x,A). \qquad (5.5)$$

特别当 μ 是概率测度，以它为初分布，则 $P_t^*\mu$ 是 ξ_t 的分布，即

$$P_t^*\mu(A) = E(1_A(\xi_t)) = P(\omega;\xi_t(\omega)\in A). \qquad (5.5)'$$

容易看出

$$\| P_t f \| \triangleq \sup_x |P_t f(x)| \leqslant (\sup_y |f(y)|)\int p(t,x,\mathrm{d}y)$$
$$\leqslant \sup_y |f(y)| = \| f \|,$$

$$P_{t+s}f(x) = \int p(t+s,x,\mathrm{d}y)f(y) \quad \text{(用第20页}TP.3\text{)的时齐情形)}$$
$$= \int p(t,x,\mathrm{d}z)\int p(s,z,\mathrm{d}y)f(y)$$
$$= \int p(t,x,\mathrm{d}z)P_s f(z) = (P_t \circ P_s)f(x),$$

即

$$P_{t+s} = P_t \circ P_s; \quad \| P_t \| \triangleq \sup_{\|f\|=1} \| P_t f \| \leqslant 1.$$

若 $f(x)\geqslant 0$，显然 $P_t f(x)\geqslant 0$. 由此可见 $\{P_t;t\in T\}$ 组成一个收缩（$\|P_t\|\leqslant 1$）正半群. 类似地，也可以看出 $\{P_t^*\}$ 也是一个收缩正半群.

当 $T=\boldsymbol{Z}^+$，我们立刻得到

$$P_t = (P_1)^t \quad (t\in \boldsymbol{Z}^+),$$

即 P_1 是半群的生成元. 但是，当 $T=\boldsymbol{R}^+$ 时，类似于 Q-过程中考虑 Q-矩阵，我们设法找出无穷小生成元. 为简单地突出思想，让我们考虑**有限**状态 Q-过程. 这时

$$\frac{\mathrm{d}P_t f(i)}{\mathrm{d}t} = \sum_j p'_{ij}(t)f(j) = \sum_j \sum_k p_{ik}(t)q_{kj}f(j)$$
$$= \sum_k p_{ik}(t)\sum_j q_{kj}f(j)$$
$$= P_t \circ \mathscr{A} f(i) \quad \text{(前进方程)}$$

$$= \sum_j \sum_k q_{ik} p_{kj}(t) f(j) = \sum_k q_{ik} (P_t f(k))$$

$$= \mathscr{A} \circ P_t f(i) \quad \text{(后退方程)},$$

其中

$$\mathscr{A} f(i) \triangleq \sum_k q_{ik} f(k) = \lim_{t \downarrow 0} \sum_k \frac{p_{ik}(t) - \delta_{ik}}{t} f(k),$$

而且

$$P_t f = \sum_n \frac{t^n \mathscr{A}^n f}{n!} = e^{\mathscr{A} t} f, \tag{5.6}$$

$$\mathscr{A} f = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t f - f}{t}. \tag{5.7}$$

这里 $\mathscr{A}$ 就称为无穷小生成元，$\mathscr{A}$ 是 Q 的算子表现. 对于连续状态、连续时间参数的马氏过程我们也可以按(5.7)那样来考虑. (5.6)式只宜于借鉴，在一般情况下却不可取，因为 $\mathscr{A}$ 一般地不是有界算子，不能定义它的指数算子. 下面，让我们给出马氏过程的半群及其生成元.

定义 5.1(马氏过程的半群及其生成元) 设 $\xi = \{\xi_t; t \in \boldsymbol{R}^+\}$ 是以 $(\mathscr{S}, \Sigma)$ 为状态空间，以 $\{p(t, x, A); t \in \boldsymbol{R}^+, A \in \Sigma\}$ 为转移函数族的时齐马氏过程. 令

$$P_t f(x) \triangleq E_x(f(\xi_t)) \quad (f \in \mathscr{B}), \tag{5.8}$$

$\{P_t\}$ 作为将 $\mathscr{B}$ 映入 $\mathscr{B}$ 的收缩线性算子半群称为 ξ 为半群. 又令

$$\mathscr{D}(\mathscr{A}) \triangleq \left\{ f \in \mathscr{B}; \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t f - f}{t} \text{ 在 } \mathscr{B} \text{ 中收敛} \right\}, \tag{5.9}$$

$$\mathscr{A} f \triangleq \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t f - f}{t} \quad (f \in \mathscr{D}(\mathscr{A})), \tag{5.10}$$

我们称 $\mathscr{A}$ 是 $\{P_t\}$ 的无穷小生成元. 令

$$\mathscr{B}_0 \triangleq \{ f \in \mathscr{B}; \lim_{t \downarrow 0} \| P_t f - f \| = 0 \}, \tag{5.11}$$

称 $\mathscr{B}_0$ 为 $\{P_t\}$ 的强连续中心.

注：如存在 $\mathscr{B}$ 的子空间 $\mathfrak{C}$，使它对 P_t 不变($\forall t \in \boldsymbol{R}^+$)，即 $P_t \mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}$，也可将 P_t 限制在 $\mathfrak{C}$ 中.

现在让我们来考查 $B=\{B_t;t\in R^+\}$(Brown 运动)的半群及其生成元. 考查

$$P_tf(x)=E_xf(B_t)=\int\frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}f(y)dy,$$

$$P_tf(x)-f(x)=\int\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}f(x+\sqrt{t}z)dz-f(x)$$

$$=\int\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(f(x+\sqrt{t}z)-f(x)\right)dz.$$

当 $f\in C_u(R^1)\triangleq\{f:R^1\to R^1;$有界一致连续$\}$,

$$|P_tf(x_1)-P_tf(x_2)|$$

$$\leqslant\int\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left|f(x_1+\sqrt{t}z)-f(x_2+\sqrt{t}z)\right|dz.$$

$\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $|y_1-y_2|<\delta$ 时,永远有

$$|f(y_1)-f(y_2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

因而,当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时

$$|P_tf(x_1)-P_tf(x_2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\int\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dz<\varepsilon.$$

可见 P_tf 也一致连续. 此外$\exists$ $\Delta>0$,使得

$$\int_{|z|\geqslant\Delta}\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dz\leqslant\frac{\varepsilon}{2(\|f\|+1)},$$

于是当 $0\leqslant t\leqslant\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^2$, $|z|<\Delta$, 有 $\left|f(x+\sqrt{t}z)-f(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$,进而有

$$|P_tf(x)-f(x)|\leqslant\int\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left|f(x+\sqrt{t}z)-f(x)\right|dz$$

$$\leqslant \int_{|z|\geqslant \Delta} + \int_{|z|<\Delta}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon \| f \|}{2(\| f \| + 1)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

这样就得到 $C_u(\boldsymbol{R}^1)$ 在 $\{P_t\}$ 的强连续中心里. 为了方便起见,我们有时也将 P_t 限制在 $C_u(\boldsymbol{R}^1)$ 上.

现在,让我们来看 $\boldsymbol{B}$ 的半群的生成元. 由于

$$\frac{P_t f(x) - f(x)}{t} = \int \frac{\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{f(x + \sqrt{t}\, z) - f(x)}{t} \mathrm{d}z,$$

如果

$$f \in C_u^2(\boldsymbol{R}^1) \triangleq \{f \in C_u(\boldsymbol{R}^1);\, f'' \text{一致连续,而且有界}\},$$

则

$$\mathscr{A} f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \int \frac{\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{f'(x)}{\sqrt{t}} z + \frac{f''(x + \theta\sqrt{t}\, z)}{2t} t z^2 \right\} \mathrm{d}z$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \int \frac{\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \left(f''(x + \theta\sqrt{t}\, z) - f''(x) \right) \mathrm{d}z + \frac{1}{2} f''(x)$$

$$= \frac{1}{2} f''(x) \quad (\text{由于 } f'' \text{ 一致连续,上式收敛对 } x \text{ 一致}),$$

即

$$\left\| \frac{P_t f - f}{t} - \frac{1}{2} f'' \right\| \to 0, \; f \in \mathscr{D}(\mathscr{A}),$$

而且

$$\mathscr{A} f = \frac{1}{2} f''.$$

因此,$C_u^2(\boldsymbol{R}^1) \subset \mathscr{D}(\mathscr{A})$. 找出 $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ 是技术性较强的问题,一般我们只需找出它的一个子集,使之在 $\mathscr{B}_0$ 中稠即可. 这里 $C_u^2(\boldsymbol{R}^1)$ 在 $C_u(\boldsymbol{R})$ 中是稠的. 这对我们考虑不少问题已经够了.

3. Brown 桥

从 Brown 运动 $\boldsymbol{B} = \{B_t; t \in \boldsymbol{R}^+\}$, $B_0 = 0$ 出发,令

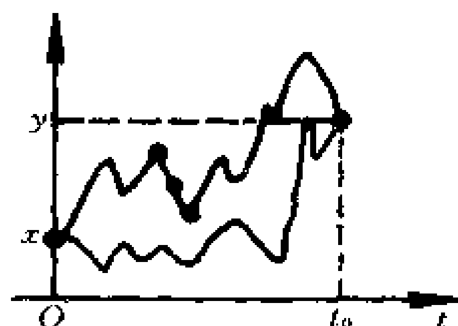
$$X_t^{x,y} = B_t + x + \frac{t}{t_0}(y - x - B_{t_0}), \tag{5.12}$$

则

$$X_0^{x,y}(\omega)=x,\ X_{t_0}^{x,y}(\omega)=y\ (\forall\ \omega\in\Omega),$$

也即沿任何轨道 ω，$X(\omega)$ 都经过 $(0,x)$ 与 (t_0,y) 两点(见下图). 我们称 $\{X_t^{x,y};t\in[0,t_0]\}$ 为 Brown 桥.

下面我们来研究 Brown 桥的分布. 显然它是一个 Gauss 系，因而我们只需考查它的期望与协方差. 事实上，容易算出



$$EX_t^{x,y}=x+\frac{t}{t_0}(y-x)\triangleq\mu_t,$$

$$E(X_t^{x,y}-\mu_t)(X_s^{x,y}-\mu_s)$$

$$=t\wedge s-\frac{st}{t_0}.$$

可见 $\{X_t^{x,y};\}$ 不再是时齐的过程.

命题 5.4 $\{X_t^{x,y};t\in[0,t_0]\}$ 与 $\{X_{t_0-t}^{y,x};t\in[0,t_0]\}$ 具有相同的分布.

证明 由于 Brown 桥是 Gauss 系，所以要证明本命题中二过程同分布，只要证明它们具有相同的期望与协方差函数. 事实上

$$EX_{t_0-t}^{y,x}=y+\frac{t_0-t}{t_0}(x-y)=x+\frac{t}{t_0}(y-x)=EX_t^{x,y},$$

$$E\left(X_{t_0-t}^{y,x}-\mu_t\right)\left(X_{t_0-s}^{y,x}-\mu_s\right)$$

$$=(t_0-t)\wedge(t_0-s)-\frac{(t_0-t)(t_0-s)}{t_0}$$

$$=t_0-t\vee s-t_0+t+s-\frac{ts}{t_0}$$

$$=t\wedge s-\frac{ts}{t_0},$$

可见命题结论正确. ▌

命题 5.5 Brown 桥是一个马氏过程，但非时齐.

证明 由于 Brown 桥是 Gauss 的，令

$$\tilde{X}_t\triangleq X_t^{x,y}-\mu_t,$$

于是，由命题 1.12，就得到：对 $s<t$，

$$E(\tilde{X}_t|\tilde{X}_s)=\frac{E(\tilde{X}_t\tilde{X}_s)}{E(\tilde{X}_s\tilde{X}_s)}\tilde{X}_s=\frac{t\wedge s-\frac{ts}{t_0}}{s-\frac{s^2}{t_0}}\tilde{X}_s=\frac{t_0-t}{t_0-s}\tilde{X}_s.$$

又由于对 $\forall\tau\leqslant s$，我们有

$$E\left(X_t^{x,y}-\mu_t-\frac{t_0-t}{t_0-s}\tilde{X}_s\right)(X_\tau^{x,y}-\mu_\tau)=E\left(\left(\tilde{X}_t-\frac{t_0-t}{t_0-s}\tilde{X}_s\right)\tilde{X}_\tau\right)$$

$$=\tau\frac{t_0-t}{t_0}-\tau\frac{t_0-t}{t_0-s}\frac{t_0-s}{t_0}=\tau\frac{t_0-t}{t_0}-\tau\frac{t_0-t}{t_0}=0.$$

可见 $\varphi\triangleq X_t^{x,y}-\left(\mu_t+\frac{t_0-t}{t_0-s}(X_s^{x,y}-\mu_s)\right)$ 与 $\mathscr{F}_s\triangleq\sigma(X_u^{x,y};u\leqslant s)$ 独立. 于是

$$\begin{aligned}E\left(e^{i\lambda X_t^{x,y}}|\mathscr{F}_s\right)&=e^{i\lambda\left(\mu_t+\frac{t_0-t}{t_0-s}\tilde{X}_s\right)}E(e^{i\lambda\varphi}|\mathscr{F}_s)\\&=e^{i\lambda\left(\mu_t+\frac{t_0-t}{t_0-s}(X_s^{x,y}-\mu_s)\right)}E(e^{i\lambda\varphi})\text{（它对 }\sigma(X_s^{x,y})\text{ 可测）}\\&=E\left(e^{i\lambda X_t^{x,y}}|X_s^{x,y}\right).\ \blacksquare\end{aligned}$$

命题 5.6 简单地将 $X_t^{x,y}$ 记为 X_t；则对 $\forall n\geqslant1$ 及 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n\leqslant t_0$，我们有

$$\begin{aligned}&P(\omega;X_{t_1}(\omega)\in A_1,X_{t_2}(\omega)\in A_2,\cdots,X_{t_n}(\omega)\in A_n)\\&=\int_{A_1}dz_1\int_{A_2}dz_2\cdots\int_{A_{n-1}}dz_{n-1}\int_{A_n}dz_nI\\&=P(\omega;\tilde{B}_{t_1}\in A_1,\tilde{B}_{t_2}\in A_2,\cdots,\tilde{B}_{t_n}\in A_n|\tilde{B}_0=x,\tilde{B}_{t_0}=y),\end{aligned}\tag{5.13}$$

其中

$$I=\frac{\dfrac{e^{-\frac{(z_1-x)^2}{2t_1}}}{\sqrt{2\pi t_1}}\dfrac{e^{-\frac{(z_2-z_1)^2}{2(t_2-t_1)}}}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}\cdots\dfrac{e^{-\frac{(z_n-z_{n-1})^2}{2(t_n-t_{n-1})}}}{\sqrt{2\pi(t_n-t_{n-1})}}\dfrac{e^{-\frac{(y-z_n)^2}{2(t_0-t_n)}}}{\sqrt{2\pi(t_0-t_n)}}}{\dfrac{e^{-\frac{(y-x)^2}{2t_0}}}{\sqrt{2\pi t_0}}},$$

$\tilde{\boldsymbol{B}}=(\tilde{B}_t;t\in\tilde{\boldsymbol{R}}^-)$是一个 Brown 运动.

本命题说明 Brown 桥就是将 Brown 运动分别在 $t=0$ 时固定在 x,而将 $t=t_0$ 的值固定在 y 的条件过程.

证明 由于

$$E\big((X_{t_k}-\mu_{t_k})B_{t_0}\big)=E\left(\left(B_{t_k}-\frac{t_k}{t_0}B_{t_0}\right)B_{t_0}\right)=t_k-\frac{t_k}{t_0}t_0=0,$$

$\{X_{t_k};k=1,2,\cdots,n\}$与 B_{t_0}独立,因而

$$E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_k\lambda_kX_{t_k}}\right)=E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_k\lambda_kX_{t_k}}\,\Big|\,B_{t_0}\right)=E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_k\lambda_k\left(B_{t_k}+x+\frac{t_k}{t_0}(y-x-B_{t_0})\right)}\,\Big|\,B_{t_0}\right)$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_k\lambda_k\left(x+\frac{t_k}{t_0}(y-x-B_{t_0})\right)}E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_k\lambda_kB_{t_k}}\,\Big|\,B_{t_0}\right).$$

又因为左边的条件期望与 B_{t_0}的取值无关,不妨取 $B_{t_0}=y-x$,上式就成为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_k\lambda_kx}E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_k\lambda_kB_{t_k}}\,\Big|\,B_{t_0}=y-x\right)$$

$$=E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_k\lambda_k(B_{t_k}-x)}\,\Big|\,B_{t_0}=y-x\right)$$

$$=E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_k\lambda_k\tilde{B}_{t_k}}\,\Big|\,\tilde{B}_{t_0}=y\right).$$

上式中$\{\tilde{B}_t=B_t+x;t\in\boldsymbol{R}^+\}$仍然是一个 Brown 运动,$\tilde{B}_0=x$,因而上式为

$$\int\cdots\int p(z_1,z_2,\cdots z_n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_k\lambda_kz_k}\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_n.$$

可见$\{X_{t_1},\cdots,X_{t_n}\}$的联合分布密度是$\{\tilde{B}_{t_1},\cdots,\tilde{B}_{t_n}\}$对 $\tilde{B}_0=x$ 与 $\tilde{B}_{t_0}=y$ 的条件分布密度:

$$p(z_1,z_2,\cdots z_n)$$

$$=\frac{\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{(z_1-x)^2}{2t_1}}}{\sqrt{2\pi t_1}}\;\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{(z_2-z_1)^2}{2(t_2-t_1)}}}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}\cdots\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{(z_n-z_{n-1})^2}{2(t_n-t_{n-1})}}}{\sqrt{2\pi(t_n-t_{n-1})}}\;\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{(y-z_n)^2}{2(t_0-t_n)}}}{\sqrt{2\pi(t_0-t_n)}}}{\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2t_0}}}{\sqrt{2\pi t_0}}}.\ \blacksquare$$

4. 高维 Brown 运动

定义 5.2(d-维 Brown 运动) $\boldsymbol{B}=\{B_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$称为一个 d-维 Brown 运动,如果

1) $B_t=(B_t^1,B_t^2,\cdots,B_t^d)\in\boldsymbol{R}^d$,

2) $\{B_t^1;t\in\boldsymbol{R}^+\},\cdots,\{B_t^d;t\in\boldsymbol{R}^+\}$是 d 个相互独立的一维 Brown 运动.

以后我们将 d-维 Brown 运动写为 BM^d.

命题 5.7 $\boldsymbol{B}=\{B_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$是 BM^d,当且仅当以下诸条件满足:

1) $\{B_{t_i}-B_{s_i}\}$对彼此不相交的区间$(s_i,t_i]$都相互独立(即独立增量);

2) B_t-B_s 遵从正态分布 $N(0,(t-s)\boldsymbol{I})$,其中 0 是 n 元零向量,$\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵;

3) $\{B_t(\omega)\}$对固定 ω 是 t 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中取值的连续函数.

证明 与一维相应的命题类似,留给读者去验证. ▌

命题 5.8 将命题 5.1 中条件(5.1)改为

$$E(B_t)=0, \tag{5.14}$$

$$E(B_t^TB_s)=(t\wedge s)\boldsymbol{I},$$

则该命题对 BM^d 亦成立.

证明 由于

$$E(B_t^TB_s)=\begin{pmatrix} E(B_t^1B_s^1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & E(B_t^dB_s^d) \end{pmatrix},$$

容易导出所需结论. ▌

命题 5.9 命题 5.2 中诸结论对 BM^d 仍成立.

证明留给读者.

命 5.10 设 $\boldsymbol{B}=\{B_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$是 BM^d;$B_0=0$,$\boldsymbol{\Gamma}$ 是一个 d 阶正交矩阵,则$\{B_t\boldsymbol{\Gamma};t\in\boldsymbol{R}^+\}$仍是 BM^d.

证明 因

$$E((B_t\Gamma)^T(B_s\Gamma)) = \Gamma^T E(B_t^T B_s)\Gamma = (t \wedge s)\boldsymbol{I},$$

则由 $\{B_t\Gamma; t\in \boldsymbol{R}^+\}$ 仍为 Gauss 系，应用命题 5.7 即可得. ▌

对多维 Brown 运动，仍可考虑其半群：

$$P_t f = \int_{\boldsymbol{R}^d} p(t,x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

其中

$$y = (y_1,\cdots,y_n),\ \ \mathrm{d}y = \mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n,$$

$$p(t,x,y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^d}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2t}\sum_{k=1}^{d}(y_k-x_k)^2}.$$

不难证明对 $f\in C_u(\boldsymbol{R}^d)$：$\boldsymbol{R}^d\to\boldsymbol{R}^1$，二阶导数一致连续，有

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{P_t f - f}{t} = \frac{1}{2}\Delta f = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}.$$

§2 Brown 运动的存在性及其轨道性质

在 §5.1 中我们讨论了遵从 Brown 分布的过程，但是作为 Brown 运动（以后简称 BM）还要求它的轨道对 t 是连续的. 我们注意到并非任何分布的随机过程都允许它有连续轨道的“版本”. 例如 Poisson 分布的随机过程，轨道只在 $\{0,1,2,\cdots\}$ 中跳跃地迁移，轨道不可能连续. 读者也许会想：造成不连续轨道的原因是状态空间离散，如果我们考虑连续的状态空间，就可能使过程沿轨道连续了. 这是不对的. 下面的例子说明对某些分布的马氏过程（状态空间连续），它不可能有轨道连续的版本.

例 1（Cauchy 过程） 设 $C=\{C_t; t\in\boldsymbol{R}^+\}$ 是以 $(\boldsymbol{R}^1,\mathscr{B}^1)$ 为状态空间的独立增量过程，而且

$$P(\omega; C_t - C_s \in A) = \int_A \frac{t-s}{\pi((t-s)^2+x^2)}\mathrm{d}x,$$

不妨设 $C_0=0$. 由于

$P(\omega, C_\cdot(\omega)$ 在 $[a,b]$ 上连续)

$$=P(\omega;C.(\omega)\text{在}[a,b]\text{上一致连续})$$

$$\leqslant P\left(\varlimsup_{n\to\infty}\bigcap_{i=1}^{n}\left\{\omega,\left|C_{\frac{i}{n}(b-a)}(\omega)-C_{\frac{i-1}{n}(b-a)}(\omega)\right|\leqslant\varepsilon\right\}\right)$$

$$\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left\{\omega:\left|C_{\frac{i}{n}(b-a)}(\omega)-C_{\frac{i-1}{n}(b-a)}(\omega)\right|\leqslant\varepsilon\right\}\right)$$

$$=\varlimsup_{n\to\infty}\left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\frac{b-a}{n}}{\left[\left(\frac{b-a}{n}\right)^2+y^2\right]\pi}\mathrm{d}y\right]^n=\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}\frac{n\varepsilon}{b-a}\right)^n$$

$$=\varlimsup_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}\frac{b-a}{n\varepsilon}\right)^n=\mathrm{e}^{\frac{-2(b-a)}{\pi\varepsilon}}\to 0\quad(\varepsilon\downarrow 0).$$

可见 $C.(\omega)$对几乎所有 ω,在任一开区间中都有不连续点,也即以概率为 1 地 $C.(\omega)$的不连续点在$[0,+\infty)$上稠密.

另一方面,注意到:当 $C_0=0$ 时,

$tC_1\overset{d}{=}C_t$ (意思是"$\overset{d}{=}$"左右二随机变量同分布),

与

$$P(|C_{t+s}-C_s|\geqslant\varepsilon)=2\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{t\mathrm{d}y}{(t^2+y^2)\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{\varepsilon}{t}\right)\xrightarrow[t\downarrow 0]{}0,$$

可见 $C.$ 在依概率收敛意义下连续.

然而,沿轨道的连续性又不是完全由分布决定的.下面让我们举例来说明这一点.

例 2 假设我们已经得到一个 BM^1,即它遵从 Brown 分布,而且又轨道连续.将它记为 $\boldsymbol{B}=\{B_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$.令

$$\tau(\omega)=\min\{t;|B_t(\omega)|=1\}.$$

容易看出

$$P(\tau(\omega)=t)\leqslant P(\omega,|B_t(\omega)|=1)=0.$$

再令

$$\xi_t(\omega)=\begin{cases}B_t(\omega), & \text{当 } t\neq\tau(\omega);\\ 0, & \text{当 } t=\tau(\omega).\end{cases}$$

那么显然

$$\xi_\tau(\omega) = 0 \neq 1 = \lim_{t\to\tau(\omega)} B_t(\omega) = \lim_{t\to\tau(\omega)} \xi_t(\omega),$$

即 $\xi_.(\omega)$在 τ 间断. 然而在集合$\{\omega:\tau(\omega)\neq t\}$上

$$\xi_t(\omega) = B_t(\omega), 即\ \xi_t(\omega) = B_t(\omega) \quad (\text{a.e.}).$$

可见$\{\xi_t(\omega);t\in \boldsymbol{R}^+\}$与$\{B_t(\omega);t\in \boldsymbol{R}^+\}$的一切有限维联合分布都相等,因而它们同分布. 这样就给出了两个具有相同的分布的随机过程,其一沿轨道连续,而另一则不然.

定理 5.11 Brown 运动存在.

本定理意思是:可以构造一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及其上的随机过程$\{B_t;t\in \boldsymbol{R}^+\}$,使得它遵从 Brown 分布,而且对固定的 ω, $B_t(\omega)$是对 t 的连续函数. 一般来说,Kolmogorov 相容定理只能构造一个随机过程遵从要求的分布,但并不能保证它的轨道几乎处处连续. 本定理的证明将归入 § 6.3 中,与具有连续轨道的马氏过程的构造统一处理.

定理 5.12 对 BM^d: $\{B_t;t\in \boldsymbol{R}^+\}$的几乎所有轨道 ω, $B.(\omega)$都是处处连续,处处不可微的.

证明 由于$\{B_{n+t}(\omega)-B_n(\omega);t\in \boldsymbol{R}^+\}$仍然是 BM^d,所以我们只需考虑时间区间 $T=[0,1]$的情形. 又由于 BM^d 的各分量独立,我们不妨只考虑 $d=1$.

若 $B.(\omega)$在 s 可微,则$\exists\ \delta>0$ 与整数 $l\geqslant 1$,使得当$|t-s|<\delta$有

$$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| < l|t-s|,$$

$\leqslant \frac{4}{n} < \delta$

$S \quad \frac{i}{n} \quad \frac{i+1}{n} \quad \frac{i+2}{n} \quad \frac{i+3}{n} \quad t$

$\leqslant \frac{3}{n}$

则当 $n>\frac{4}{\delta}$，令 $i=[ns]+1\leqslant n$，对 $j=i+1,i+2,i+3$ 都应有

$$\begin{aligned}
\left|B_{\frac{j}{n}}-B_{\frac{j-1}{n}}\right| &\leqslant \left|B_{\frac{j}{n}}-B_s\right|+\left|B_s-B_{\frac{j-1}{n}}\right| \\
&\leqslant l\left|\frac{j}{n}-s\right|+l\left|\frac{j-1}{n}-s\right| \\
&\leqslant l\left(\frac{4}{n}+\frac{3}{n}\right)=\frac{7l}{n}.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

再令

$$A_{n,l}^i \triangleq \{\omega;\text{对 } l,i\,(5.14)\text{对 } j=i+1,i+2,i+3 \text{ 成立}\}.$$

于是 $A_{n,l}^i\uparrow$（当 $l\uparrow$），而且因为可取 $\delta=\frac{1}{m}$

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &\triangleq \{\omega;\exists\ s\in[0,1],\text{使 } B.(\omega)\text{ 在 } s \text{ 可微}\} \\
&\subseteq \bigcup_{\substack{l\geqslant 1\\ m\geqslant 1}}\bigcap_{n\geqslant 4m}\bigcup_{i\leqslant n}A_{n,l}^i.
\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}
P\Big(\bigcup_{i\leqslant n}A_{n,l}^i\Big) &\leqslant n\max_{1\leqslant i\leqslant n}P\big(A_{n,l}^i\big) \\
&\leqslant n\left(P\left(\omega;\left|B_{\frac{i}{n}}-B_{\frac{i-1}{n}}\right|\leqslant\frac{7l}{n}\right)\right)^3 \\
&= n\left(\int_{\frac{7l}{n}}^{\frac{7l}{n}}\frac{e^{-\frac{y^2}{2/n}}}{\sqrt{2\pi\frac{1}{n}}}\mathrm{d}y\right)^3 \\
&\leqslant n\left(\frac{14l}{\sqrt{2n\pi}}\right)^3=\frac{(14l)^3}{(\sqrt{2\pi})^3\sqrt{n}}\to 0\quad(\text{当 } n\to+\infty).
\end{aligned}$$

可见

$$P(\Omega_1)\leqslant\lim_{l\to+\infty}\lim_{n\to\infty}P\Big(\bigcup_{i\leqslant n}A_{n,l}^i\Big)=0. \blacksquare$$

推论 Brown 运动沿几乎所有轨道在任何有限区间上不有限变差.

证明 由于有限变差函数几乎处处可导，推论显然. ▌

定理 5.13（平方变差） 设有区间 $[s,t]$ 的一个分割

$$\pi_n:\ t = t^{(n)}_{m_n} > t^{(n)}_{m_{n-1}} > \cdots > t^{(n)}_1 > t^{(n)}_0 = s.$$

令

$$\|\pi_n\| \triangleq \max_{0\leqslant k\leqslant m_n - 1} \left| t^{(n)}_{k+1} - t^{(n)}_k \right|,$$

则当 $\|\pi_n\| \to 0 (n \to +\infty)$ 时有以下极限式在 $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 意义下成立：

$$S_n \triangleq \sum_k \left| B_{t^{(n)}_{k+1}}(\omega) - B_{t^{(n)}_k}(\omega) \right|^2 \to t - s \quad (n \to +\infty).$$

又若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\pi_n\| < +\infty$，则 $S_n \to t - s$ (a.e.). 特别地，若 π_n 是不断二分的一列分割，显然有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\pi_n\| = 2(t-s) < +\infty$.

证明 由于

$$S_n - (t-s) = \sum_k \left[\left(B_{t^{(n)}_{k+1}} - B_{t^{(n)}_k} \right)^2 - \left(t^{(n)}_{k+1} - t^{(n)}_k \right) \right],$$

和号中各项相互独立，均值为零，我们有

$$E(S_n - (t-s))^2 = \sum_k E\left(\left(B_{t^{(n)}_{k+1}} - B_{t^{(n)}_k} \right)^2 - \left(t^{(n)}_{k+1} - t^{(n)}_k \right) \right)^2.$$

令 X 是一个遵从 $N(0,1)$ 的随机变量，则上式变为

$$\begin{aligned}
\sum_k E(X^2-1)^2 \left(t^{(n)}_{k+1} - t^{(n)}_k \right)^2 &= E(X^2-1)^2 \sum_k \left(t^{(n)}_{k-1} - t^{(n)}_k \right)^2 \\
&\leqslant E(X^2-1)^2 \|\pi_n\| \sum_k \left(t^{(n)}_{k+1} - t^{(n)}_k \right) \\
&= E(X^2-1)^2 (t-s) \|\pi_n\| \\
&\to 0 \quad (\text{当} \|\pi_n\| \to 0, n \to +\infty).
\end{aligned}$$

又当 $\sum\limits_n \|\pi_n\| < +\infty$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_n P(\omega; |S_n(\omega) - (t-s)| \geqslant \varepsilon) &\leqslant \sum_n \frac{E(S_n - (t-s))^2}{\varepsilon^2} \\
&\leqslant \frac{E(X^2-1)^2(t-s)}{\varepsilon^2} \sum_n \|\pi_n\| < +\infty \quad (\forall\, \varepsilon > 0 \text{ 成立}).
\end{aligned}$$

于是由 Borel-Cantelli 引理，$S_n \to t - s$ (a.e.). ▌

从上面的定理已可看到当 $t-s$ 很小 B_t-B_s 应大致有 $\sqrt{t-s}$ 的数量级. 对 B_t-B_s 作更精确的估计有一系列有趣的结果，其中有不少非常不同于直观的猜想. 由于篇幅所限，我们只列举这方面的一些结果，不做一一论证. 读者可以参考所引文献，以了解、学习其论证.

1）对任何 $\alpha>\frac{1}{2}$，沿几乎所有轨道，$B_\cdot(\omega)$ 无处 α-阶 Hölder 连续（即不存在 $t>0$ 与 $\delta, H>0$，使当 $|t-s|<\delta$ 都有不等式 $|B_t-B_s|\leqslant H|t-s|^\alpha$ 成立）.

2）对固定的 s，有以下极限式

$$P\left\{\omega;\varlimsup_{t\downarrow s}\frac{B_t(\omega)-B_s(\omega)}{\sqrt{2|t-s|\log\log|t-s|^{-1}}}=1\right\}=1,$$

$$P\left\{\omega;\varliminf_{t\downarrow s}\frac{B_t(\omega)-B_s(\omega)}{\sqrt{2|t-s|\log\log|t-s|^{-1}}}=-1\right\}=1,$$

$$P\left\{\omega;\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{B_{t+s}(\omega)-B_s(\omega)}{\sqrt{2t\log\log t}}=1\right\}=1,$$

$$P\left\{\omega;\varliminf_{t\to+\infty}\frac{B_{t+s}(\omega)-B_s(\omega)}{\sqrt{2t\log\log t}}=-1\right\}=1$$

（参见[Lo]或[Fd]）.

3）对几乎所有的 ω，$B_t(\omega)$ 总有趋于无穷的一列零点，所以考虑 $|B_{t+s}-B_s|$ 的阶的下极限就没有意思了，但是我们可有以下有趣的结果：

$$P\left\{\varliminf_{t\to\infty}\left(\frac{\log\log t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|B_t(\omega)|=\frac{\pi}{\sqrt{8}}\right\}=1.$$

（Chung K. L.，Trans. Amer. Math. Soc. 64(1948)205～233.）

4）$$P\left\{\omega;\lim_{h\downarrow 0}\max_{\substack{|t-s|<h\\0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1}}|B_s(\omega)-B_t(\omega)|\bigg/\sqrt{2h\log\frac{1}{h}}=1\right\}=1.$$

（P. Levy 于 1948 年证明了上式中改为 $\varlimsup_{h\downarrow 0}$ 的情形，后由 S. Orey 与 J. Taylor 于 1974 年 Proc. London Math. Soc. 28，174～192 中

指出极限的存在性.)

5) $P\left\{\omega;\sup_{t}\overline{\lim_{h\downarrow 0+}}\frac{|B_{t+h}(\omega)-B_t(\omega)|}{\sqrt{2h\log h^{-1}}}=1\right\}=1.$

(这个结果表面上似乎与 2)中结果矛盾,但由于对不同的 t,2)中的零测度例外集可以不同,它们合在一起是一个概率为 1 的集合. 参见 4)中所引 Orey 与 Taylor 的文章.)

§3 Brown 运动与停时

1. 强马氏性与再生性

定理 5.14 BM^d 是 $\left\{\mathscr{F}_{t+}\triangleq\bigcap_{u>t}\mathscr{F}_u\right\}$ 的强马氏过程;即对任意关于 $\mathscr{F}_{t+}$ 的停时 σ 及有界可测函数 f 及非负实数 t,恒有

$$E_x(f(B_{\sigma+t})1_{\{\sigma<+\infty\}}(\omega)\mid\mathscr{F}_{\sigma+})=E_{B_\sigma}(f(B_t)1_{\{\sigma<+\infty\}}),$$

其中

$$\mathscr{F}_{\sigma+}=\left\{A\in\bigvee_u\mathscr{F}_u;\text{对}\,\forall\,t>0,A\cap\{\omega;\sigma(\omega)\leqslant t\}\in\mathscr{F}_{t+}\right\}.$$

证明 由于本定理的证明与马氏过程的强马氏性完全相同,所以我们留到下一章去作. ▌

注:由于 $\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}_{t+}$,$BM^d$ 显然也是$\{\mathscr{F}_t\}$的强马氏过程.

推论 1 BM^d 对$\{\mathscr{F}_{t+}\}$是马氏过程.

由强马氏性可以得到许多有趣的结果,下面各推论给出了许多这方面的例子.

推论 2(Blumenthal 0-1 律) 若 $A\in\mathscr{F}_{0+}$,$\mathscr{F}_{t+}\triangleq\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s=\bigcap_{s>t}\sigma(B_u;u\leqslant s)$,则 $P_x(A)=0$ 或 1.

证明
$$\begin{aligned}P_x(A)&=E_x(1_A(\omega))=E(1_A(\omega)\mid B_0=x)\\&=E(1_A(\omega)\mid\mathscr{F}_{0+})=1_A(\omega)=0\text{或}1,\end{aligned}$$

由于 $P_x(A)$非随机,所以它只能是 0 或 1. ▌

推论 3 设 $\boldsymbol{B}=\{B_t;t\geqslant 0\}$ 是 BM^1. 令

$A^+=\{\omega;\exists\ \delta>0$, 使得 $B_t(\omega)>0$ 对 $\forall 0<t<\delta$ 成立$\}$,

$A^-=\{\omega;\exists\ \delta>0$, 使得 $B_t(\omega)<0$ 对 $\forall 0<t<\delta$ 成立$\}$,

$A=\{\omega;\forall\delta>0, B_t(\omega)$ 在 $(0,\delta)$ 中有零点$\}$,

则
$$P_0(A^+)=P_0(A^-)=0,\ P_0(A)=1.$$

证明 由于对 $\forall\delta_n\downarrow 0$,

$$A^+=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{\omega;B_t(\omega)>0\text{ 对 }\forall\ 0<t<\delta_n\text{ 成立}\},$$

就有 $A^+\in\mathscr{F}_{0+}$. 又由于

$$P_0(A^+)<\lim_{n\to\infty}P_0\left(B_{\delta_n}>0\right)=\frac{1}{2}<1,$$

由推论 2, $P_0(A^+)=0$. 同理 $P_0(A^-)=0$. 这样就得到

$$P_0(A)=1-P_0(A^c)=1-P_0(A^+)-P_0(A^-)=1.\ \blacksquare$$

推论 4(尾代数的 0-1 律) 设 $\boldsymbol{B}=\{B_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$ 是 BM^d, $\mathscr{F}_t^\infty\triangleq\sigma(B_s;s\geqslant t)$, $\mathscr{F}_\infty^\infty\triangleq\bigcap_t\mathscr{F}_t^\infty$(尾代数). 则对 $\forall A\in\mathscr{F}_\infty^\infty$ 有

$$P_x(A)\equiv 0\text{ 或 }1\quad(\forall\ x\in\boldsymbol{R}^d).$$

证明 先设 $B_0=0$, 令 $\tilde{B}_t\triangleq tB_{\frac{1}{t}}$, $\tilde{B}_0=0$. 则 $\tilde{\boldsymbol{B}}\triangleq\{\tilde{B}_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$ 是标准 Brown 运动, 而且由鞅修正定理可知 $\tilde{B}_t$ 在 $t=0$ 右连续,

$$\mathscr{F}_\infty^\infty=\bigcap_{t>0}\mathscr{F}_t^\infty=\bigcap_{t>0}\tilde{\mathscr{F}}_{\frac{1}{t}}=\tilde{\mathscr{F}}_{0+},$$

其中 $\tilde{\mathscr{F}}_s=\sigma(\tilde{B}_u;u\leqslant s)$. 由推论 3 立刻得到

$$P_0(A)=0\text{ 或 }1\quad(\forall\ A\in\mathscr{F}_\infty^\infty=\tilde{\mathscr{F}}_{0+}).$$

现在, 我们取消所设条件 $B_0=0$, 一般地来证明: 对 $\forall A\in\mathscr{F}_\infty^\infty=\bigcap_t\mathscr{F}_t^\infty\subset\mathscr{F}_1^\infty$, 存在 f, 使

$$\begin{aligned}1_A(\omega)&=f\left(B_1,B_{t_1},\cdots,B_{t_n},\cdots\right)\\&=\theta_1 f\left(B_0,B_{t_1-1},\cdots,B_{t_n-1},\cdots\right)\\&\triangleq\theta_1\eta(\omega)\quad(1<t_1<\cdots<t_n<\cdots)\end{aligned}$$

(记号 θ_t 可见第 12 页). 于是当 $P_0(A)=0$ 时,就有

$$0=P_0(A)=E_0(\theta_1\eta)=E_0\big(E_{B_1}(\eta)\big)=\int \mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}E_y(\eta). \quad (5.15)$$

由于 $1_A(\omega)=f\big(B_1,B_{t_1},\cdots\big)$,不妨设 $f\geqslant 0$,于是 $\eta\geqslant 0$. 从而 $E_y(\eta)\geqslant 0$. 因此(5.15)就蕴含 $E_y(\eta)=0$(a.e.). 进而就得到

$$P_x(A)=E_x(\theta_1\eta)=E_x\big(E_{B_1}(\eta)\big)=\int \mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}E_y(\eta)=0. \quad (5.16)$$

而当 $P_0(A)=1$,就有 $P_0(A^c)=0$,由(5.16)就得到

$$P_x(A^c)=0,\text{即 } P_x(A)=1-P_x(A^c)=1. \quad \blacksquare$$

下面的定理说明了一个 BM^d,由某停时重新开始仍得一个 BM^d,这叫 BM^d 的**强再生性**.

定理 5.15 设 $\boldsymbol{B}=\{B_t,t\in\boldsymbol{R}^+\}$ 是一个 BM^d,$\tau(\omega)<+\infty$ 是对 $\{\mathscr{F}_{t+}\}$ 的停时,则 $\widetilde{\boldsymbol{B}}=\{\widetilde{B}_t:t\in\boldsymbol{R}^+\}$ ($\widetilde{B}_t=B_{\tau(\omega)+t}-B_{\tau(\omega)}$) 仍是一个 BM^d,而且它与 $\mathscr{F}_\tau$ 独立.

证明 $\widetilde{B}_0=0$,而且对任意的 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n<+\infty$,由定理 5.14,我们有

$$E\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^n\lambda_k\widetilde{B}_{t_k}}\,|\,\mathscr{F}_\tau\big)=E_x\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^n\lambda_k(B_{t_k}-x)}\big)\Big|_{x=B_\tau}=E_0\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^n\lambda_kB_{t_k}}\big)$$

$$=E\big(\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^n\lambda_k(B_{t_k}-B_0)}\big)=E\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^n\lambda_kB_{t_k}}\big).$$

可见 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 与 $\mathscr{F}_\tau$ 独立,而且与标准 BM^d 同分布. $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 轨道的连续性是显然的.

注:对一般的停时,只要把 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 限制在 $\widetilde{\Omega}\triangleq\{\omega;\tau(\omega)<+\infty\}$ 上,即考虑对 $\widetilde{\Omega}$ 的条件概率,定理 5.15 仍然成立.

推论 设

$$\tau_a(\omega)=\inf\{t>a;B_t(\omega)=0\},Z(\omega)=\{t;B_t(\omega)=0\}.$$

则

$$P(\omega;\tau_a(\omega) \text{ 是 } Z(\omega) \text{ 的(右)极限点}) = 1.$$

证明 考虑 $\tilde{B}_t(\omega) = B_{t+\tau_a}(\omega) - B_{\tau_a}(\omega) = B_{t+\tau_a}(\omega)$，则 $\{\tilde{B}_t;t\geqslant 0\}$ 是 BM^1，而且 $\tilde{B}_0(\omega)=0$. 由定理 5.14 推论 3，就得到对于那里的 A 有

$$P_x(\omega;\forall\,\delta > 0, \exists\, 0 < t < \delta \text{ 使 } \tilde{B}_t(\omega) = 0) = P(A) = 1.$$

因而

$$\begin{aligned}
&P_x(\omega;\tau_a(\omega) \text{ 是 } Z(\omega) \text{ 的(右)极限点}) \\
&= P_x\left(\omega;\text{对 } \forall\,\delta > 0, \exists\, 0 < t < \delta \text{ 使 } B_{t+\tau_a(\omega)}(\omega) = 0\right) \\
&= P_x P_0(A) = 1. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

命题 5.16 $P_x(\omega;\{t;B_t(\omega)=0\}\text{是完全集})=1$.

证明 一个集合为完全集即它是闭集，而且每个点都是它的极限点. 显然$\{t;B_t(\omega)=0\}$是一个闭集. 所以我们只需证明它的每一点都是它的极限点，也即它没有孤立点. 设 $B_{\tau(\omega)}(\omega)=0$，若不存在 $t_n\leqslant\tau(\omega)$使得 $t_n\uparrow\tau(\omega)$而且 $B_{t_n}(\omega)=0$，那么一定存在一个有理数 $r<\tau(\omega)$，使得

$$\tau(\omega) = \inf\{t > r;B_t(\omega) = 0\} \triangleq \tau_r(\omega).$$

从而可见

$$\begin{aligned}
\{t;B_t(\omega) = 0\} = &\left\{t;\exists\, t_n \uparrow t, \text{使得 } B_{t_n}(\omega) = 0\right\} \\
&\bigcup_r \{t;t = \tau_r(\omega);r \text{ 是一个有理数}\}.
\end{aligned}$$

由定理 5.15 推论，

$$P_x(\{t;B_t(\omega) = 0\}\text{的每一点都是它的极限点}) = 1. \quad \blacksquare$$

推论 $P_x(\omega;\{t;B_t(\omega)=x\}\text{是完全集})=1$.

证明 考虑$\{B_t(\omega)-x;t\in \boldsymbol{R}^+\}$即可. ▌

2. 反射原理

如果在某停时 τ 后，将一个 BM^d 的各分量对 $B_\tau^{(i)}$ 作镜象反射而得一个新过程(见图)，由于 BM^d 的对称性所得新过程仍是一个

BM^d 运动. 下面这个定理就阐明了这一深刻的事实,它对反射 Brown 运动等重要过程的研究是很关键的.

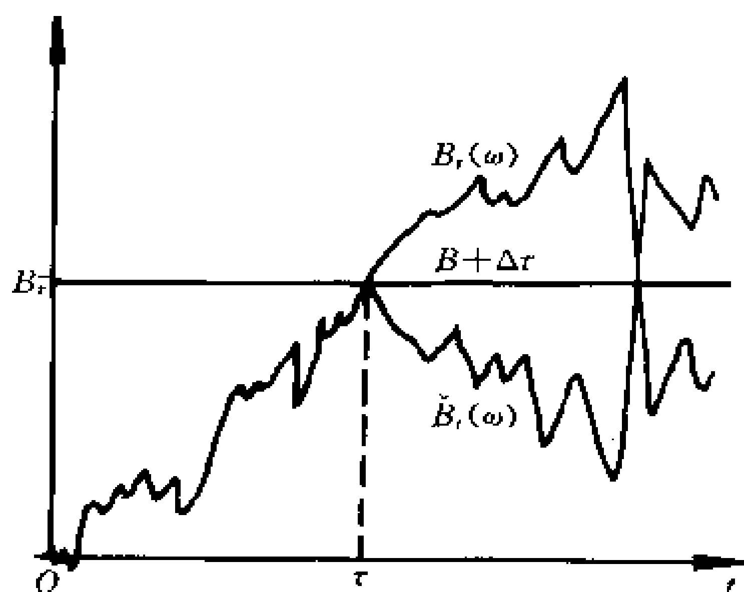
定理 5.17(反射原理) 设 $\boldsymbol{B}=\{B_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$是 BM^d,$\tau(\omega)$是对 $\{\mathscr{F}_t=\sigma(B_u;u\leqslant t)\}$的停时. 令

$$\check{B}_t(\omega)=\begin{cases}B_t(\omega), & t<\tau(\omega),\\ 2B_{\tau(\omega)}-B_t(\omega), & t\geqslant\tau(\omega).\end{cases}$$

则

1) $\check{\boldsymbol{B}}=\{\check{B}_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$是 BM^d;

2) $(\check{\boldsymbol{B}},\tau)$与$(\boldsymbol{B},\tau)$同分布.



证明 容易看出:

$$B_t+\check{B}_t=2B_{t\wedge\tau},$$
$$B_t-\check{B}_t=2(B_t-B_{t\wedge\tau}).$$

即

$$B_t=B_{t\wedge\tau}+(B_t-B_{t\wedge\tau})=B_{t\wedge\tau}+\overline{B}_{t-\tau}1_{\{t>\tau\}},$$
$$\check{B}_t=B_{t\wedge\tau}-(B_t-B_{t\wedge\tau})=B_{t\wedge\tau}+(-\overline{B}_{t-\tau})1_{\{t>\tau\}},$$
$$(5.17)$$

其中 $\overline{B}_t=(B_{t+\tau}-B_\tau)1_{(\tau<+\infty)}$,由定理 5.15 后面的注可知 $\overline{\boldsymbol{B}}\triangleq\{\overline{B}_t\}$是在$\{\tau<+\infty\}$上的 BM^d 且与 $B_{\cdot\wedge\tau}$独立.

(5.17)说明:$\boldsymbol{B}$ 与 $\check{\boldsymbol{B}}$ 分别是$(\{B_{t\wedge\tau}\},\tau,\overline{\boldsymbol{B}}.)$与$(\{B_{t\wedge\tau}\},\tau,-\overline{\boldsymbol{B}})$相同的泛函,又由于 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 与 $-\overline{\boldsymbol{B}}$ 同分布,又都与 $\mathscr{F}_\tau$ 独立,$\{B_{t\wedge\tau}\}$及 τ 对 $\mathscr{F}_\tau$ 可测,就立刻可见$(\boldsymbol{B},\tau)$与$(\check{\boldsymbol{B}},\tau)$同分布,因而 $\check{\boldsymbol{B}}$ 是 BM^d. ▌

定理5.18 令 $B_t^*=\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}B_s$($\boldsymbol{B}=\{B_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$是$BM^1$). 对 $z\geqslant0$, 我们有

1) $P_0(B_t^*\geqslant z,B_t<x)=P_0(B_t>2z-x)\quad(x\leqslant z)$.

2) 当 $B_0=0$, B_t^* 与 $|B_t|$ 同分布.

3) 令 $\tau_z=\inf\{t\geqslant0;B_t=z\}$,我们有

$$P_0(\tau_z\leqslant t)=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}}z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2u}}\mathrm{d}u,$$

$$E_0\tau_z=+\infty,\quad P_0(\tau_z<+\infty)=1.$$

证明 首先请注意:当 $B_0=0$ 时,我们有

$$\{\omega;B_t^*\geqslant z\}=\{\omega;\tau_z\leqslant t\}.$$

1) 对 $z\geqslant x$,

$$\begin{aligned}P_0(B_t^*\geqslant z,B_t<x)&=P_0(\tau_z\leqslant t,B_t<x)\\&=P_0(\tau_z\leqslant t,\check{B}_t<x)\text{(由定理 5.17)}\\&=P_0(\tau_z\leqslant t,2z-B_t<x)=P_0(B_t>2z-x).\end{aligned}$$

2) 在 1)中取 $x=z$,就得到

$$P_0(B_t^*\geqslant z,B_t<z)=P_0(B_t>z).$$

从而

$$\begin{aligned}P_0(B_t^*\geqslant z)&=P_0(B_t^*\geqslant z,B_t<z)+P_0(B_t\geqslant z)\\&=P_0(B_t\geqslant z)+P_0(B_t\geqslant z)\\&=2P_0(B_t\geqslant z)=P_0(|B_t|\geqslant z).\end{aligned}$$

3) $P_0(\tau_z\leqslant t)=P_0(B_t^*\geqslant z)=2P_0(B_t\geqslant z)$

$$=2\int_z^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{z}{\sqrt{t}}}^\infty\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=\int_0^t\frac{z}{\sqrt{2\pi u^3}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2u}}\mathrm{d}u.$$

因而

$$P_0(\tau_z < +\infty) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1,$$

$$E_0\tau_z = \int_0^{\infty} \frac{z}{\sqrt{2\pi u}} e^{-\frac{z^2}{2u}} du = +\infty. \blacksquare$$

推论 1 (B_t, B_t^*)有密度

$$f(x,z) = \frac{2(2z-x)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(2z-x)^2}{t}} 1_{\{x\leqslant z, 0<z\}}.$$

证明 对 1)微商立得. ▌

推论 2 $\lim\limits_{z\to+\infty} \tau_z = +\infty$ (a. e.).

证明 先设 $B_0=0$. 由于 $\tau_z \uparrow$, 而且

$$P_0(\tau_z \leqslant t) = 2P_0(B_t \geqslant z) \to 0 \ (z \to +\infty),$$

可见 $\tau_z \to +\infty$ (对 P_0 a. e.). 一般地, $\tau_z \uparrow$ (当 $z \geqslant B_0$), 而且

$$P_x(\tau_z \leqslant t) = 2P_0(B_t \geqslant z - x) \to 0 \ (z \to +\infty)(\forall x).$$

因此 $\tau_z \to +\infty$ (对$\forall$ P a. e.) (当 $z \to +\infty$). ▌

推论 3 令 $\sigma_z(\omega) = \inf\{t>0, |B_t(\omega)| \geqslant z\}$, 则

$$P_x\left(\omega; \sigma_z(\omega) \xrightarrow[z\to+\infty]{} +\infty\right) = 1.$$

证明 令 $\tau_z^-(\omega) = \inf\{t \geqslant 0; -B_t \geqslant z\}$. 则 $\tau_z^-(\omega) \to +\infty$ (a. e.). 于是,

$$\sigma_z(\omega) = \tau_z(\omega) \wedge \tau_z^-(\omega) \to +\infty \ (\text{a. e.}). \blacksquare$$

推论 4 $P_x(\omega; \tau_z(\omega) < +\infty) = 1 \quad (\forall x, z \in \boldsymbol{R}^1)$.

证明 只需注意

$$P_x(\omega; \tau_z(\omega) < +\infty) = P_0(\omega; \tau_{|z-x|}(\omega) < +\infty)$$

即可. ▌

推论 5 令

$$\lambda_t = \sup\{s: 0 \leqslant s \leqslant t, B_s = B_t^*\},$$

它是 $B.$ 在$[0,t]$中末离最大值的时刻(不是停时), 那末在 P_0 下, (B_t, B_t^*, λ_t) 有密度

$$g(x,z,s)=\frac{z(z-x)}{\pi\sqrt{s^3(t-s)^3}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{s}+\frac{(z-x)^2}{t-s}\right)}1_{\{(0\vee x)\leqslant z,0<s<t\}}.$$

证明 1° 先证一个等式：对 $s<t$

$$\begin{aligned}&P_0(B_s^*\in[z,z+\mathrm{d}z],B_s\in[z-y,z-y+\mathrm{d}y],\\&\quad\lambda_t\leqslant s,B_t\in[x,x+\mathrm{d}x])\\&\qquad=P_0(B_s^*\in[z,z+\mathrm{d}z],B_s\in[z-y,z-y+\mathrm{d}y],\\&\qquad\qquad\max_{s\leqslant u\leqslant t}B_u\leqslant z,B_t\in[x,x+\mathrm{d}x])+o(\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

事实上，左≥右；但是另一方面，如果在右方概率式中，用$\max\limits_{s\leqslant u\leqslant t}B_u\leqslant z+\varepsilon$ 代替$\max\limits_{s\leqslant u\leqslant t}B_u\leqslant z$，那末就比左方要大. 令 $\varepsilon\to 0$ 便得等式.

2° 用 1°及马氏性，我们得到 1°的等式左方为

$$\begin{aligned}&P_0(B_s^*\in[z,z+\mathrm{d}z],B_s\in[z-y,z-y+\mathrm{d}y])\\&\qquad\cdot(P_{z-y}(B_{t-s}^*\leqslant z,B_{t-s}\in[x,x+\mathrm{d}x])+o(\mathrm{d}x))\\&\quad=P_0(B_s^*\in[z,z+\mathrm{d}z],B_s\in[z-y,z-y+\mathrm{d}y])\\&\qquad\cdot(P_0(B_{t-s}^*\leqslant y,B_{t-s}\in[x+y-z,x+\mathrm{d}x+y-z])\\&\qquad+o(\mathrm{d}x)).\end{aligned}$$

再用推论 1，上式关于(z,y,x)有密度

$$\begin{aligned}&\frac{2(z+y)}{\sqrt{2\pi s^3}}\mathrm{e}^{-\frac{(z+y)^2}{2s}}\int_{x+y-z}^{y}\frac{2(2u-(x+u-z))}{\sqrt{2\pi(t-s)}^3}\mathrm{e}^{-\frac{(2u-(x+u-z))^2}{2(t-s)}}\mathrm{d}u\\&\quad=\frac{(z+y)}{\pi\sqrt{s^3(t-s)}}\mathrm{e}^{-\frac{(z+y)^2}{2s}}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{(y-x+z)^2}{2(t-s)}}+\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2(t-s)}}\right)\\&\quad=\frac{z+y}{\pi\sqrt{s^3(t-s)}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{(y+\mu_+)^2}{2\sigma^2}-\frac{(2z-x)^2}{2t}}-\mathrm{e}^{-\frac{(y+\mu_-)^2}{2\sigma^2}-\frac{x^2}{2t}}\right],\end{aligned}$$

其中

$$\mu_\pm\triangleq\frac{z(t-s)\pm(x-z)s}{t},\quad\sigma^2\triangleq\frac{s(t-s)}{t}.$$

对 y 求积分，便得到 $P_0(B_s^*\in[z,z+\mathrm{d}z],\lambda_t\leqslant s,B_t\in[x,x+\mathrm{d}x])$ 关于(z,x)有密度

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi t^3}}\left[\Phi\left(-\frac{\mu_+}{\sigma}\right)(2z-x)\mathrm{e}^{-\frac{(2z-x)^2}{2t}}-\Phi\left(-\frac{\mu_-}{\sigma}\right)x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}\right],$$

其中 Φ 是 $N(0,1)$ 的分布函数. 最后把上式对 s 求微商就得到 $g(x,z,s)$ 的表达式. ▌

推论 6 在 P_0 下, (B_t^*, λ_t) 有密度

$$\frac{z}{\pi\sqrt{s^3(t-s)}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2s}}1_{\{z>0,0<s<t\}};$$

λ_t 有密度

$$\frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}}1_{\{0<s<t\}} \quad \text{(反正弦律)}.$$

证明 只需取边缘密度. ▌

例 3(关于鞅的停时定理的一个反例) 我们知道: $\{B_t^2-t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$ 是关于 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的鞅,其中 $\{B_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$ 是标准 BM^1, $\mathscr{F}_t=\sigma(B_u;u\leqslant t)$. 但是, $\{B_{\tau_z}^2-\tau_z;\mathscr{F}_{\tau_z}\}$ 不是鞅,这可由

$$E\left(B_{\tau_z}^2-\tau_z\right)=z^2-E\tau_z=-\infty$$

看出. 事实上, $(B_t^2-t,\mathscr{F}_t)$ 不是闭鞅,所以停时定理不成立.

3. 常返性及某些击中分布

在这段中我们讨论 BM^d 的常返性及一些有趣的击中分布. 本段中使用的方法,主要是考查与 BM^d 有关的鞅,并运用鞅的停时定理来计算出所要的结果. 这种方法具有典型性,它很好地显示了鞅论的作用. 本段各定理、命题的推演是鞅论应用的很好的实例.

命题 5.19 设 $\boldsymbol{B}$ 是一个标准 BM^1,

$$\tau_z(\omega)\triangleq\inf\{t\geqslant 0;B_t=z\},\ \tau\triangleq\{\tau_z;z\in\boldsymbol{R}^+\},$$

则 τ 是时齐独立增量过程,而且

$$E(\mathrm{e}^{-\lambda\tau_z})=\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}z}\quad(\lambda>0).$$

从而可见, τ 是 $\frac{1}{2}$ 阶**单边稳定过程**.

注:单边稳定过程指取非降值的稳定过程,而后者指具有性质 $\xi_{ct}\overset{d}{=}C^{\frac{1}{a}}\xi_t$ $(\forall C,t>0)$ 的实值随机过程

$$\xi\triangleq\{\xi_t;t\in\boldsymbol{R}^+\},$$

其中 α 称为 ξ 的阶(参见附录 I (五)).

证明 由于 $\left\{e^{\lambda B_t-\frac{1}{2}\lambda^2 t}\right\}$ 是非负鞅,由定理 2.15 I ,就可以知道对它停时定理对有界停时成立. 于是 $\left\{e^{\lambda B_{\tau_z\wedge n}-\frac{1}{2}\lambda^2\tau_z\wedge n};z\in \boldsymbol{R}^+\right\}$ 是鞅,对于 $\Lambda\in\mathscr{F}^0_{\tau_y\wedge n}$,我们有($z>y>0$)

$$E_0\left(e^{\lambda\left(B_{\tau_z\wedge n}-B_{\tau_y\wedge n}\right)-\frac{1}{2}\lambda^2\left(\tau_z\wedge n-\tau_y\wedge n\right)}I_\Lambda\right)=E_0 I_\Lambda.$$

注意 $B_{\tau_z\wedge n}\leqslant z$,当 $\lambda>0$ 时,令 $n\to\infty$,用有界收敛定理,有

$$E_0\left(e^{\lambda(z-y)-\frac{1}{2}\lambda^2(\tau_z-\tau_y)}I_\Lambda\right)=E_0 I_\Lambda\quad\left(\forall\ \Lambda\in\bigcup_n\mathscr{F}^0_{\tau_y\wedge n}\right).$$

由典型扩张,上式对于 $\Lambda\in\bigvee_n\mathscr{F}_{\tau_y\wedge n}=\mathscr{F}_{\tau_y}$ 仍成立,所以

$$E\left(e^{\lambda(z-y)-\frac{1}{2}\lambda^2(\tau_z-\tau_y)}\Big|\mathscr{F}_{\tau_y}\right)=1\quad(\forall\ z>y).$$

即

$$E\left(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(\tau_z-\tau_y)}\Big|\mathscr{F}_{\tau_y}\right)=e^{-\lambda(z-y)}.$$

由 λ 的任意性,可见 $\tau_z-\tau_y$ 与 $\mathscr{F}_{\tau_y}$ 独立,从而得到 $\{\tau_z;z\in\boldsymbol{R}^+\}$ 是时齐独立增量过程,而且

$$E\left(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\tau_z}\right)=e^{-\lambda z},$$

即

$$E\left(e^{-\lambda\tau_z}\right)=e^{-\sqrt{2\lambda}\,z}\quad(\lambda\geqslant 0),\quad \tau_{Cz}\overset{d}{=}C^2\tau_z=C^{\frac{1}{\alpha}}\tau_z\quad(\alpha=1/2).\ \blacksquare$$

命题 5.20 设 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}^{(1)},\boldsymbol{B}^{(2)})$ 是 BM^2,又设 $B_0=0,\mathscr{F}_t=\sigma(B_u;u\leqslant t)$. 令

$$\tau_z\triangleq\inf\{t;B_t^{(2)}=z\},\quad \xi_z=B^{(1)}_{\tau_z}\quad(z\geqslant 0),$$

则 $\xi=\{\xi_z;z\geqslant 0\}$ 是一个 Cauchy 过程(见本章例 1).

证明 令 $\widetilde{B}_t=B_{t+\tau_y}-B_{\tau_y}$,$\widetilde{\mathscr{F}}_t\triangleq\mathscr{F}_{\tau_y+t}$. 注意到 $P(\omega;\tilde{\tau}_z<+\infty)=1$,我们看出

$$\begin{aligned}\tau_{z+y}&=\inf\{t;B_t^{(2)}=y+z\}=\inf\{t>\tau_y;B_t^{(2)}=y+z\}\\&=\inf\left\{t>0;B^{(2)}_{t+\tau_y}=y+z\right\}+\tau_y\\&=\inf\{t>0;\widetilde{B}_t^{(2)}=z\}+\tau_y\triangleq\tilde{\tau}_z+\tau_y,\end{aligned}$$

而且

$$B^{(1)}_{\tau_{y+z}} - B^{(1)}_{\tau_y} = B^{(1)}_{\tau_y+\bar{\tau}_z} - B^{(1)}_{\tau_y} = \widetilde{B}^{(1)}_{\bar{\tau}_z}.$$

于是由 $\widetilde{B}^{(1)}_t$ 与 $\mathscr{F}_{\tau_y}$和 $\bar{\tau}_z$ 的相互独立性我们得到

$$\begin{aligned}
&E\left(e^{i\lambda(\xi_{z+y}-\xi_y)}\,\middle|\,\mathscr{F}_{\tau_y}\right) = E\left(e^{i\lambda\left(B^{(1)}_{\tau_{z+y}}-B^{(1)}_{\tau_y}\right)}\,\middle|\,\mathscr{F}_{\tau_y}\right)\\
&= E\left(e^{i\lambda\left(B^{(1)}_{\tau_y+\bar{\tau}_z}-B^{(1)}_{\tau_y}\right)}\,\middle|\,\mathscr{F}_{\tau_y}\right) = E\left(e^{i\lambda\widetilde{B}^{(1)}_{\bar{\tau}_z}}\right) = E\left(E\left(e^{i\lambda\widetilde{B}^{(1)}_{\bar{\tau}_z}}\,\middle|\,\bar{\tau}_z\right)\right)\\
&= E\left(E\left(e^{i\lambda\widetilde{B}^{(1)}_s}\,\middle|\,\bar{\tau}_z = s\right)_{s=\bar{\tau}_z}\right) = E\left(E\left(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 B^{(1)}_s}\right)\Big|_{s=\bar{\tau}_z}\right) = E\left(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\bar{\tau}_z}\right)\\
&= e^{-|\lambda|z} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z e^{i\lambda x}}{\pi(z^2+x^2)}dx \quad (z>0)\\
&= E\left(e^{i\lambda(\xi_{y+z}-\xi_y)}\right),
\end{aligned}$$

也即 $\xi_{z+y}-\xi_y$ 与 $\mathscr{F}_{\tau_y}$ 独立，但是 $\xi_u = B^{(1)}_{\tau_u} \in \mathscr{F}_{\tau_y}\ (\forall u \leqslant y)$，从而 $\{\xi_t; t\geqslant 0\}$ 是独立增量过程，又遵从 Cauchy 分布，它就是 Cauchy 过程. ▌

BM^d 的常返性依 d 的不同而异，下面让我们先给出一些不同的常返性及有关概念的定义.

考虑以 Polish 空间 $(\mathscr{S}, \Sigma)$ 为状态空间的马氏过程 $\xi \triangleq \{\xi_t; t\in \boldsymbol{R}^+\}$，它具有条件测度族 $\{P_x; x\in\mathscr{S}\}$，其中 P_x 表示从 x 出发的条件下，ξ 的条件测度.

定义 5.3（点常返性） ξ 称为点常返的，如果对 $\forall x, y\in\mathscr{S}$，

$$P_x(\omega; \xi_t(\omega) = y, \text{i.o.}) = 1.$$

定义 5.4（极集） 若 $A\in\Sigma$，

$$P_x(\omega; \xi_t(\omega) \overline{\in} A, \text{对}\ \forall\, t>0) = 1 \quad (\forall\, x),$$

则称 A 是 ξ 的极集.

事实上，对可数状态不可约马氏过程，常返就是点常返. 下面我们将证明 BM^1 也是点常返的，但 $BM^d(d\geqslant 2)$ 非点常返. 这是因为一个点对 $BM^d(d\geqslant 2)$ 是极集，因而对 $BM^d(d\geqslant 2)$ 就需要考虑另一种常返性.

定义 5.5（常返） 称 ξ 是常返的，如果对 $\mathscr{S}$ 的任一开子集 G 及 $x\in\mathscr{S}$，都有

$$P_x(\omega;\xi_t\in G,\text{i. o.})=1.$$

显然点常返必然常返. 下面将证明 BM^1 是点常返的，然而 $BM^d(d\geqslant 2)$ 每一点 $x\in \boldsymbol{R}^d$ 都是极集，因而它不可能点常返；但是 BM^2 常返，而 $BM^d(d\geqslant 3)$ 非常返. 直观地讲，这是因为 d 越大，空间越大，因而就越难以返回了.

定理 5.21 BM^1 $\boldsymbol{B}\triangleq\{B_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$ 是点常返的.

证明 令

$$\sigma_1=\inf\{t>0;B_t=z\}\quad(z\neq x,y),$$

$$\tau_1=\inf\{t>\sigma_1;B_t=y\},\ \tau_0=\inf\{t>0,B_t=y\},$$

$$\sigma_n=\inf\{t>\tau_{n-1};B_t=z\}\quad(n\geqslant 2),$$

$$\tau_n=\inf\{t>\sigma_n;B_t=y\}\quad(n\geqslant 2),$$

由定理 5.18，

$$P_x(\sigma_1(\omega)<+\infty)$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}}(z-x)\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2u}}\mathrm{d}u=1\quad(若\ z\geqslant x).$$

若 $z<x$，考虑 $\widetilde{B}_t=x-B_t$，$B_0=x$ 当且仅当 $\widetilde{B}_0=0$；$B_t=z$ 当且仅当 $\widetilde{B}_t=x-z$. 所以一般地我们有

$$P_x(\sigma_1(\omega)<+\infty)$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}}|z-x|\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2u}}\mathrm{d}u=1\quad(\forall\ z\neq x).$$

同理 $$P_z(\tau_0(\omega)<+\infty)=1\quad(\forall z\neq y).$$

另一方面，由于 $\{B_{\tau_n+t}-B_{\tau_n}\}$，$\{B_{\sigma_n+t}-B_{\sigma_n}\}$ 都与 $\{B_t-B_0\}$ 同分布，所以

$$P(\sigma_{n+1}-\tau_n<+\infty)=P_y(\sigma_1<+\infty)=1\quad(n\geqslant 1),$$

$$P(\tau_n-\sigma_n<+\infty)=P_z(\tau_0<+\infty)=1\quad(n\geqslant 1).$$

于是

$$
\begin{aligned}
& P_x(\omega;\tau_n(\omega)<+\infty) \\
&\quad = P_x(\omega;\sigma_n(\omega)<+\infty,\tau_n-\sigma_n(\omega)<+\infty) \\
&\quad = E_x\big(1_{\{\sigma_n<+\infty\}}P\big(\tau_n-\sigma_n(\omega)<+\infty\,\big|\,\mathscr{F}_{\sigma_n}\big)\big) \\
&\quad = E_x\big(1_{\{\sigma_n<+\infty\}}P\big(\tau_n-\sigma_n(\omega)<+\infty\,\big|\,B_{\sigma_n}\big)\big)\ (B_{\sigma_n}\equiv z) \\
&\quad = E_x\big(1_{\{\sigma_n<+\infty\}}P_z(\tau_0(\omega)<+\infty)\big) \\
&\quad = P_x(\sigma_n(\omega)<+\infty) \\
&\quad = E_x\big(1_{\{\tau_{n-1}<+\infty\}}E\big(\sigma_n-\tau_{n-1}<+\infty\,\big|\,\mathscr{F}_{\tau_{n-1}}\big)\big) \\
&\quad = E_x\big(1_{\{\tau_{n-1}<+\infty\}}E\big(\sigma_n-\tau_{n-1}<+\infty\,\big|\,B_{\tau_{n-1}}\big)\big)\ (B_{\tau_{n-1}}\equiv y) \\
&\quad = E_x\big(1_{\{\tau_{n-1}<+\infty\}}P_y(\sigma_1(\omega)<+\infty)\big) \\
&\quad = P_x(\tau_{n-1}(\omega)<+\infty).
\end{aligned}
$$

由归纳法得到

$$
P_x(\omega;\tau_n(\omega)<+\infty)=1\quad(\forall\, n\geqslant 1).
$$

再令 $n\to+\infty$，就得到

$$
\begin{aligned}
& P_x(\omega;B_t(\omega)=y\ 在(0,+\infty)中无穷次) \\
&\quad = \lim_{n\to+\infty}P_x(\omega;\tau_n(\omega)<+\infty)=1. \quad ▌
\end{aligned}
$$

注：对于时齐强马氏过程，有限时间概率为 1 地击中某一点至少一次，就保证它有限时间概率为 1 地击中该点无穷多次. 从上面的证明就看出这一点.

下面我们给出一个关于 BM^d 有趣的击中分布律，它是 BM^d 常返性讨论的基础. 为此，我们先证明一个联系 Brown 运动与(局部)调和函数的命题.

命题 5.22 设 P_t 是由 d 维 Brown 运动 $B_\cdot$ 生成的半群，它的生成元为 $\mathscr{A}$，则我们有

1° $P_tf(x)-f(x)=\int_0^t P_s\mathscr{A}f(x)\mathrm{d}s\quad(\forall\, f\in\mathscr{D}(\mathscr{A}))$；

2° 对于 $\forall P_x$，$f(B_t)-f(B_0)-\int_0^t\mathscr{A}f(B_s)\mathrm{d}s$ 是关于 $(\mathscr{F}_t^0)$ 的鞅 $(\forall\, f\in\mathscr{D}(\mathscr{A}),\mathscr{F}_t^0\triangleq\sigma(B_s:s\leqslant t))$；

3° 对于$\forall x\in \boldsymbol{R}^d$

$$M_t^f = f(B_t) - f(B_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \triangle f(B_s)\mathrm{d}s$$

关于$(\mathscr{F}_t^0)$为对P_x鞅$(\forall f\in C_b^2)$，其中△是 Laplace 算子.

证明 1° 由生成元的定义，对$f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$我们有

$$\left.\frac{\mathrm{d}(P_sf)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} = \mathscr{A}f.$$

再用半群性得

$$\frac{\mathrm{d}(P_sf)}{\mathrm{d}s} = P_s\mathscr{A}f.$$

从而

$$P_tf - P_0f = \int_0^t P_s\mathscr{A}f\mathrm{d}s.$$

2° 用马氏性质，我们有

$$E_x\left[\left(f(B_t) - f(B_s) - \int_s^t \mathscr{A}f(B_u)\mathrm{d}u\right) \Big| \mathscr{F}_s^0\right]$$

$$= E_{B_s}\left(f(B_{t-s}) - f(B_0) - \int_0^{t-s}\mathscr{A}f(B_u)\mathrm{d}u\right)$$

$$= P_{t-s}f(B_s) - f(B_s) - \int_0^{t-s}P_u\mathscr{A}f(B_s)\mathrm{d}u.$$

用 1°可知右式为 0.

3° 由于C_0^2(C^2中全体紧支函数)$\subset C_u^2\subset\mathscr{D}(\mathscr{A})$，且$\mathscr{A}|_{C_0^2} = \frac{1}{2}\triangle$，故对于$f\in C_0^2$利用 2°便得到$M_t^f$关于$(\mathscr{F}_t^0)$为鞅. 对于一般$f\in C_b^2$，我们定义$g_n\in C_0^2$，使

$$g_n(x) = 1 \quad (|x| \leqslant n+1).$$

令$f_n = fg_n$，于是$f_n\in C_0^2$且

$$f_n = f,\ \triangle f_n = \triangle f \quad (|x| < n+1).$$

再令

$$\sigma_n = \inf\{t: |B_t| \geqslant n\}.$$

由$\sigma_n\uparrow$，故存在极限σ_∞，如果$\sigma_\infty(\omega)<\infty$，则由$B_t$轨道连续推出

$\left|B_{\sigma_\infty(\omega)}(\omega)\right|=+\infty$，即 $B.$ 在 $\sigma_\infty(\omega)$ 中断. 可见 $\sigma_\infty=+\infty$，即 $\sigma_n\to\infty$ a.e. P_x，于是由定理 2.15 Ⅲ

$$M^f_{t\wedge\sigma_n}=M^{f_n}_{t\wedge\sigma_n}+(f_n(B_0)-f(B_0))$$

关于 $(\mathscr{F}^0_t)$ 为鞅. 在 $E_x\left(M^f_{t\wedge\sigma_n}\mid\mathscr{F}^0_s\right)=M^f_{s\wedge\sigma_n}$ 中令 $\sigma_n\to\infty$，由有界收敛定理立得 M^f_t 关于 $(\mathscr{F}^0_t)$ 为鞅. ▌

推论 若 $\varphi(x)$ 只与 $|x|$ 有关，且当 $x\neq0$ 时 $\varphi(x)$ 调和 $(\triangle\varphi=0)$. 令 $0<a<b$，

$$\tau_{a,b}=|B_t|\text{ 越出}(a,b)\text{ 的时刻，}$$

那末对于 $\forall x$ 满足 $a<|x|<b$，$\varphi\left(B_{t\wedge\tau_{a,b}}\right)$ 关于 $(\mathscr{F}^0_t)$ 对 P_x 是鞅.

证明 首先我们注意

$$P_x(\tau_{a,b}<\infty)=1.$$

事实上，由于 $B.$ 为 d 维 Brown 运动，所以 $|B_t|^2-d\cdot t$ 关于 $(\mathscr{F}^0_t)$ 是鞅. 利用定 2.15 Ⅱ (加强的停时定理)的推论，我们有

$$E_x\left(\left|B_{t\wedge\tau_{a,b}}\right|^2-\mathrm{d}(t\wedge\tau_{a,b})\right)=|x|^2.$$

于是用单调收敛定理

$$\begin{aligned}E_x\tau_{a,b}&=\lim_{t\to\infty}E_x(t\wedge\tau_{a,b})=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{d}\left(E_x\left|B_{t\wedge\tau_{a,b}}\right|^2-|x|^2\right)\\&\leqslant\frac{b^2-|x|^2}{d}<\infty.\end{aligned}$$

设 $\varphi(x)=f(|x|)$，则 $f\in C^2(x\neq0)$. 取

$$\tilde{f}(r)=\begin{cases}f(r), & \dfrac{a}{2}<r<2b;\\ 0, & r=0,r\geqslant3b,\end{cases}$$

且使 $\tilde{f}\in C^2_b$，满足 $\tilde{f}'(0)=\tilde{f}''(0)=0$，$\tilde{f}'\left(\dfrac{a}{2}\right)=f'\left(\dfrac{a}{2}\right)$，$\tilde{f}''\left(\dfrac{a}{2}\right)=f''\left(\dfrac{a}{2}\right)$，$\tilde{f}'(2b)=f'(2b)$，$\tilde{f}''(2b)=f''(2b)$，$\tilde{f}'(3b)=\tilde{f}''(3b)=0$(即 $\tilde{f}$ 是限制在 $\left(\dfrac{a}{2},2b\right)$ 上的 f 的 C^2_b 扩张(例如可用高阶多项式连结). 令 $\tilde{\varphi}(x)=\tilde{f}(|x|)$，那末由命题 5.22 定义的 $M^{\tilde{\varphi}}_t$ 关于 $(\mathscr{F}^0_t)$ 是

鞅，从而 $M^{\varphi}_{t\wedge\tau_{a,b}}=M^{\bar{\varphi}}_{t\wedge\tau_{a,b}}$ 关于 $(\mathscr{F}^0_t)$ 也是鞅. ▌

命题 5.23 令

$$\sigma_{ab}(\omega)=\inf\{t>0;|B_t(\omega)|\overline{\in}(a,b)\},$$
$$\sigma_b=\inf\{t>0;|B_t(\omega)|\geqslant b\},$$
$$\widetilde{\sigma}_a(\omega)=\inf\{t>0;|B_t(\omega)|\leqslant a\},$$

则对 $a<|x|<b$，

1） $E_x(\sigma_{ab}(\omega))<+\infty$，$P_x(\omega;\sigma_{ab}(\omega)<+\infty)=1$；

2） $P_x(\omega;\sigma_{ab}(\omega)=\sigma_b(\omega))=\dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$，

$$P_x(\omega;\sigma_{ab}(\omega)=\widetilde{\sigma}_a(\omega))=\frac{\varphi(b)-\varphi(x)}{\varphi(b)-\varphi(a)};$$

其中

$$\varphi(x)=\begin{cases}|x| & d=1;\\ \log\left|\dfrac{x}{a}\right|, & d=2;\\ \dfrac{1}{|x|^{d-2}}, & d\geqslant 3.\end{cases}$$

证明 1） 由于 $\{|B_t|^2-dt;t\geqslant 0\}$ 是鞅，所以由停时定理，

$$E_x\left(|B_{t\wedge\sigma_{ab}(\omega)}|^2-d(\sigma_{ab}(\omega)\wedge t)\right)=|x|^2,$$

从而

$$\begin{aligned}E_x\sigma_{ab}(\omega)&=\lim_{t\to+\infty}E[\sigma_{ab}(\omega)\wedge t]\\&=\frac{1}{d}\lim_{t\to\infty}\left[E_x|B_{t\wedge\sigma_{ab}(\omega)}|^2-|x|^2\right]\\&\leqslant\frac{1}{d}(b^2-|x|^2).\end{aligned}$$

2） 让我们先来作一些直观的讨论. 为了类似于命题 5.19 及命题 5.20，利用鞅的停时定理，最方便的是能够找到一个在 $\boldsymbol{R}^d-\{0\}$ 中调和函数 $\varphi(x)=f(r^2)$ $(r^2=|x|^2)$. 这样 $\varphi(x)$ 在球面 $|x|=a,b$ 上都是常数，而且 $\varphi(B_t)$ 是一个鞅，那末如能用停时定理，就得到

$$E_x\left(\varphi\left(B_{\sigma_{ab}}\right)\right)=\varphi(x),$$

即
$$\varphi(a)p+\varphi(b)(1-p)=\varphi(x),$$

其中

$$p=P\left(\omega;\left|B_{\sigma_{ab}}(\omega)\right|=a\right)=P\left(\omega;\sigma_{ab}(\omega)=\widetilde{\sigma}_a(\omega)\right).$$

于是就得到

$$p=\frac{\varphi(x)-\varphi(b)}{\varphi(a)-\varphi(b)},$$

$$1-p=P\left(\omega;\sigma_{ab}(\omega)=\sigma_b(\omega)\right).$$

由此可见只要能找到合适的 $\varphi(x)$,并能确保停时定理正确,命题就可得证. 由于

$$\varphi(x)=f(r^2),$$

$$\triangle f(r^2)=f''(r^2)4r^2+f'(r^2)2d,$$

从而可见

$$\varphi(x)=f(r^2)=\begin{cases}C\sqrt{r}, & d=1;\\ \log Cr, & d=2;\\ C\dfrac{1}{r^{d-2}}, & d\geqslant 3.\end{cases}$$

特别取 $C=1$(当 $d=1,d\geqslant 3$),$C=\dfrac{1}{|a|}$(当 $d=2$)就能保证 $\varphi(x)\geqslant 0$ $(a\leqslant|x|\leqslant b)$,这样,对 $B_{\sigma_{ab}\wedge n}$,用停时定理再仿照定理 5.19 的办法令 $n\to\infty$,命题证明的全部问题都解决了. ▌

定理 5.24 对 $BM^d(d\geqslant 2)$,任一个固定点 y 是极集,即

$$P_x(\tau_y<+\infty)=0\quad(\text{对}\ \forall\, x),\tag{5.18}$$

其中 $\tau_y(\omega)=\inf\{t>0;B_t(\omega)=y\}$. 而对 BM^1 任一固定点 y 都以概率为 1 能到达.

证明 由定理 5.18 推论 3,对 BM^1,

$$P_x(\tau_y<+\infty)=1,$$

可见任一固定点 y 都不是极集. 对 $BM^d(d\geqslant 2)$,我们来证明 (5.18). 不妨设其中 $y=0$. 先设 $x\neq 0$. 让我们沿用命题 5.23 中的

符号，并令

$$\sigma_b^{(i)}(\omega) \triangleq \inf\{t>0; |B_t^{(i)}(\omega)|>b\} \quad (i=1,2,\cdots,d),$$

于是由 $\sigma_b(\omega) \geqslant \min\limits_{i\leqslant d} \sigma_{b/2}^{(i)}(\omega) \to +\infty$(a. e.)$(b\to\infty)$(见定理 5.18 推论 3)就有

$$P_x(\omega;\tau_0(\omega)<+\infty) = \lim_{b\to\infty} P_x(\omega;\tau_0(\omega)<\sigma_b(\omega))$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\lim_{a\to 0} P_x(\omega;\sigma_{ab}(\omega)<\sigma_b(\omega))$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty}\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{\ln \dfrac{b}{x}}{\ln \dfrac{b}{a}}, & d=2; \\ \lim\limits_{b\to\infty}\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{-\dfrac{1}{|b|^{d-2}}+\dfrac{1}{|x|^{d-2}}}{-\dfrac{1}{|b|^{d-2}}+\dfrac{1}{|a|^{d-2}}}, & d\geqslant 3 \end{cases}$$

$$= 0.$$

若 $x=0$，则我们用马氏性得到

$$P_0(\varepsilon+\theta^\varepsilon\tau_0<\infty) = P_0(\theta^\varepsilon\tau_0<\infty)$$

$$= E_0 P_{B_\varepsilon}(\tau_0<\infty) = \int P_z(\tau_0<\infty)\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}e^{-\frac{z^2}{2\varepsilon}}dz$$

$$= 0 \quad (\text{因为 } z\neq 0 \text{ 时已证 } P_z(\tau_0<\infty)=0).$$

令 $\varepsilon\to 0$ 得

$$P_0(\tau_0<\infty)=0. \blacksquare$$

定理 5.25 BM^2 是常返的，但 $BM^d(d\geqslant 3)$ 非常返而且

$$P(\omega;|B_t(\omega)|\to+\infty)=1.$$

证明 沿用命题 5.23 中的符号，对 $0<a<|x|<z$，由定理 5.24 的推理可知

$$P_x\left(\sigma_z \xrightarrow{z\to\infty} \infty\right)=1,$$

我们有

$$P_x(\omega;\tilde{\sigma}_a(\omega)<+\infty) = \lim_{z\to\infty} P_x(\omega;\tilde{\sigma}_a(\omega)\leqslant\sigma_z(\omega))$$

$$= \lim_{z\to\infty} P_x(\omega;\tilde{\sigma}_a(\omega) \leqslant \sigma_{az}(\omega))$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\ln\left|\dfrac{z}{x}\right|}{\ln\left|\dfrac{z}{a}\right|}, & d = 2; \\ \lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{|x|^{d-2}} - \dfrac{1}{|z|^{d-2}}}{\dfrac{1}{|a|^{d-2}} - \dfrac{1}{|z|^{d-2}}}, & d \geqslant 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & d = 2; \\ \left|\dfrac{a}{x}\right|^{d-2}, & d \geqslant 3. \end{cases}$$

可见当 $d\geqslant3$，$P_x(\omega;\tilde{\sigma}_a(\omega)<+\infty)<1$，即此时 BM^d 非常返.

进而我们还可得到

$$P_x(\omega;|B_t(\omega)|\not\to+\infty) = P_x\left(\bigcup_N A_N\right) = \lim_{N\to\infty} P_x(A_N),$$

其中

$$A_N = \{\omega;\exists \text{有理数 } t_{n(m)}(\omega) \to +\infty \text{ 使得} |B_{t_{n(m)}}(\omega)| \leqslant N\}.$$

又由于 $P(\sigma_m(\omega)<+\infty)=1$，我们有

$$\begin{aligned} P_x(A_N) &\leqslant P_x(\omega;\text{对 } \forall\, m \geqslant 1, \exists\, t_{n(m)}(\omega) \geqslant \sigma_m(\omega)) \\ &\leqslant \lim_{m\to\infty} P_x(\omega;\exists\, t_{n(m)}(\omega) \geqslant \sigma_m(\omega)) \\ &= \lim_{m\to\infty} P_x\left(P_{B_{\sigma_m}(\omega)}(\tilde{\sigma}_N(\omega) < +\infty)\right) \\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{N}{m}\right)^{d-2} = 0. \end{aligned}$$

因而 $$P(\omega;|B_t(\omega)|\not\to+\infty) = 0,$$

即 $$P(\omega;|B_t(\omega)|\to+\infty) = 1.$$

另一方面，对 $d=2$，由定理 5.18 推论 2 又得到

$$P_x(\omega;\tilde{\sigma}_a(\omega) <+\infty) \geqslant P'_x(\omega;\exists\, i \leqslant 2, \text{使} |B^{(i)}_{\cdot}(\omega)| \text{ 在有限时间} \leqslant a) = 1 \quad (|x| > |a|).$$

类似于定理 5.21，就可得到对$\forall$开圆 $S(0,a)\triangleq\{x\in \boldsymbol{R}^2;|x|^2<a^2\}$，

$$P_x(\omega;B_t(\omega)\in S(0,a),\ \text{i.o.})=1,$$

因而

$$P_x(\omega;B_t(\omega)\in S(x_0,a),\ \text{i.o.})$$
$$=P_x(\omega;B_t(\omega)-x_0\in S(0,a),\text{i.o.})=1.$$

于是,对$\forall$开集 G,它总含有一个小球,设其中心为 x_0,用$\tilde{B}_t\triangleq B_t-x_0$ 代替及上面的推理,我们有

$$P_x(\omega;B_t(\omega)\in G,\ \text{i.o.})=1.$$

从而得到 BM^2 是常返的.

注:d 维 Brown 运动有许多有趣的性质,如:以下集合的概率均为 1:

(1) 对$\forall n$,$B_\cdot(\omega)$有∞个 n 重点($d\leqslant 2$);

(2) $B_\cdot(\omega)$无三重点($d=3$);

(3) $B_\cdot(\omega)$有∞个二重点($d\leqslant 3$);

(4) $B_\cdot(\omega)$无二重点($d\geqslant 4$).

习 题

1. $\{B_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$遵从 1 维 Brown 分布,当且仅当

$$\left\{e^{i\lambda B_t-\frac{1}{2}\lambda^2 t};\sigma(B_u,u\leqslant t)\right\}$$

是鞅.

2. 设$\{B_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$是 1 维 Brown 运动,令

$$r_t=|B_t|,\ M_t=r_t^2-t,\ \mathscr{F}_t=\sigma(B_s;s\leqslant t).$$

求证:$\{M_t,\mathscr{F}_t\}$是鞅;$\{r_t,\mathscr{F}_t\}$是马氏过程,其转移密度是

$$p(t;x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}}\operatorname{ch}\frac{xy}{t},$$

而且

$$Er_t=\sqrt{\frac{2t}{\pi}},\ E(r_t-Er_t)^2=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)t.$$

3. 设 $B_t=(B_t^{(1)},B_t^{(2)},\cdots,B_t^{(d)})$是 d-维 Brown 运动,令

$$r_t = (B_t^{(1)})^2 + \cdots + (B_t^{(d)})^2, \quad M_t = r_t^2 - td,$$
$$\mathscr{F}_t = \sigma(B_u; u \leqslant t).$$

称$\{r_t\}$为$\{B_t\}$的向径过程. 试证明：$\{M_t, \mathscr{F}_t\}$是鞅；$\{r_t, \mathscr{F}_t\}$是马氏过程，具有转移密度

$$p(t;x,y) = \frac{1}{t}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(xy)^{1-\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}-1}\left(\frac{xy}{t}\right) y^{d-1},$$

其中$I_\alpha(\cdot)$是α-阶 Bessel 函数.

4. 在上题中令：

$$\tau_r(\omega) = \inf\{t; r_t(\omega) \geqslant r\},$$

试利用鞅的停时定理证明：$E(\tau_r(\omega)) = \dfrac{r^2}{d}$.

提示：考虑$\{r_t^2 - td, \mathscr{F}_t\}$及$\{r_{t\wedge\tau}^2 - (t\wedge\tau)d, \mathscr{F}_{t\wedge\tau}\}$.

5. 设$\{B_t; t\in \boldsymbol{R}^+\}$是$BM^1$，令

$$\tau_{a,b}(\omega) = \inf\{t:\ B_t \overline{\in} (a,b)\} \quad (a < b).$$

试利用鞅的停时定理证明：

$$P(B_{\tau_{a,b}} = b) = \frac{|a|}{|b| + |a|};$$

$$P(B_{\tau_{a,b}} = a) = \frac{|b|}{|b| + |a|};$$

$$E(\tau_{a,b}) = |a||b|.$$

6. 试证明 Brown 运动的平移$\{B_t + \mu t; t\in \boldsymbol{R}^+\}$仍是一个高斯马氏过程，并求出其转移密度.

7. 试证明BM^1的转移函数

$$p(t;x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$$

满足偏微分方程

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad 与 \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}.$$

8. 对上题中的$p(t;x,y)$，试证对$\forall f(\cdot)$在$(-\infty, +\infty)$有界一致连续，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t;x,y)f(y)\mathrm{d}y - f(x) \to 0 \quad (t \to 0);$$

对任意具有二阶有界一致连续导数，并有界一致连续的函数 f 有

$$\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{+\infty} p(t;x,y)(f(y) - f(x))\mathrm{d}y \to \frac{1}{2}f''(x).$$

9. 设 $\{B_t;t\in \boldsymbol{R}^+\}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 Brown 运动. 令

$$W_t(\omega) = \int_0^t B_s(\omega)\mathrm{d}s.$$

试证明：

$$EW_t = 0;\ EW_t^2 = \frac{t^3}{3};$$

$$P(W_t \in G | B_0 = x) = \int_G \frac{\sqrt{6}\,\mathrm{e}^{-\frac{\sigma\left(y-\frac{tx}{2}\right)^2}{t^3}}}{\pi t^3}\mathrm{d}y;$$

$$E(\mathrm{e}^{\lambda W_t}) = \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t^3}{6}}.$$

10. 设 $\xi = \{\xi_t;t\in \boldsymbol{R}^+\}$ 为 Poisson 过程，试证明 ξ 随机连续，而且均方连续，但不可能有连续轨道.

11. 试证明

$$P(\sup_{0\leqslant u\leqslant t} |B_u(\omega)| > \varepsilon) \leqslant \frac{t}{\varepsilon^2},\quad P\left(\sup_{v\geqslant t>0} \frac{|B_v(\omega)|}{v} > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 t},$$

其中 $\{B_t;t\in \boldsymbol{R}^+\}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 Brown 运动.

12. 令 $\Delta_{nk} = B_{\frac{k}{2^n}} - B_{\frac{k-1}{2^n}}, S_n = \sum_{k=1}^{2^n}\Delta_{nk}^2$. 试证明：

1) $E(S_{n+1}|S_n) = \frac{1}{2}(S_n+1)$；

2) $E(S_n|S_{n+1}) = S_{n+1}$

提示：先证

$$E\left(\Delta_{n+1,2k-1}^2 + \Delta_{n+1,2k}^2 \middle| B_{\frac{j}{2^n}};\quad j = 1,2,\cdots,2^n\right) = \frac{1}{2}(\Delta_{n,k}^2 + 1),$$

$$E(\Delta_{n,k}^2 | \Delta_{n+1,2k-1}^2,\Delta_{n+1,2k}^2) = \Delta_{n+1,2k-1}^2 + \Delta_{n+1,2k}^2.$$

13. 设有 $\{\Omega,\mathscr{F},P\}$ 上的两个随机过程：

$$X = \{X_t; t \in \boldsymbol{R}^+\}, \ Y = \{Y_t; t \in \boldsymbol{R}^+\}$$

都沿轨道连续，而且对$\forall t \in [0,1]$，

$$P(X_t(\omega) = Y_t(\omega)) = 1,$$

试证明：

$$P(X_t(\omega) = Y_t(\omega),\ 对\ \forall\, t \in [0,1]) = 1.$$

14. 试证明任何轨道连续的随机过程，对$\{\mathscr{F}_t = \sigma(x_u; u \leqslant t)\}$一定循序可测.

15. 设$B.$是BM^1，令$T(\omega) = \{t \in [0,1]; B_t(\omega) = 0\}$，试证明对$\forall \omega \in \Omega$，$T(\omega)$是闭集，并具有 Lebesgue 零测度.

16. 利用 Brown 运动的重对数律：

$$\overline{\lim_{t \downarrow 0}} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log \log t^{-1}}} = 1, \quad \underline{\lim_{t \downarrow 0}} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log \log t^{-1}}} = -1,$$

证明：上题中$T(\omega)$一定是一个无穷集，并且是一个完全集（没有孤立点）.

提示：令$\sigma = \inf\{t; B_t = 0, t \geqslant a\}$，考虑$\{B_{t+\sigma} - B_\sigma; t \in \boldsymbol{R}^+\}$.

17. 试证明：

$$P_0\{\omega; B.(\omega)\ 在(t_0, t_1)中至少有一个零点\})$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{\frac{t_1 - t_0}{t_0}} = \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\sqrt{\frac{t_0}{t_1}}.$$

提示：所求概率$E_0\left(P_0(\omega; \tau_{|a|}(\omega) \leqslant t_1 - t_0)\big|_{a = B_{t_0}}\right)$.

18. 考虑方程

$$\begin{cases} f''(t) = g(t), & 0 < t < 1; \\ f(0) = f(1) = 0. \end{cases}$$

证明对$\forall g \in C[0,1]$上面的方程有解；并且它可表为

$$f(t) = -\int_0^1 I(t,s) g(s) \mathrm{d}s,$$

其中$I(t,s)$是 Brown 桥$\{X_t^{0,0} = B_t - tB_1\}$的协方差函数.

19. 记

$$S = \left\{f(x); f \in C^\infty, \sup_{x \in \boldsymbol{R}^1}\left|(1 + |x|^2)^{\frac{m}{2}} f^{(k)}(x)\right| < \infty\right\},$$

$f_n \xrightarrow{S} 0$，如果$\sup\limits_{\substack{x\in \mathbf{R}^1\\ k\leqslant m}} \left|(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}} f_n^{(k)}(x)\right| \to 0 \ (n\to\infty)$，求证对于 BM^1 的半群算子 P_t 有：

$$f_n \xrightarrow{S} 0 \Longrightarrow P_t f_n \xrightarrow{S} 0 \quad (\forall\ t)$$

（对于 BM^d 也有类似结论）.

20. 设 BM 满足 $B_0=0$，求证 $P(\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|B_s|<1)\geqslant e^{-\lambda_0 t}$，其中 λ_0 是

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\triangle u = \lambda u. \\ u(\pm 1) = 0\end{cases}$$

的第一个特征值.

第六章 马氏过程

在第三至五章中，我们分别研究了可数状态的马氏过程与一种特殊的以 $\boldsymbol{R}^d$ 为状态空间的马氏过程——Brown 运动，我们对马氏过程已经有一些具体的了解. 本章我们将对马氏过程进行一般的研究：讨论它的半群与无穷小生成元、强马氏性，以及轨道性质等问题. 作为应用，在下章，我们再简单介绍一下近年来发展很快，受到普遍重视的几个有关问题：无穷粒子系统的统计模型，点过程与随机测度.

§1 马氏过程与半群及鞅问题

在§5.2 中，我们看到半群及其无穷小生成元可将离散状态空间(如马氏链)与连续状态空间(如 BM^d)的马氏过程作统一的刻画，使我们更能把握住马氏过程的特征. 本节中，我们给出一般的马氏过程半群理论.

给定一个 Polish 空间$(\mathscr{S},\Sigma)$(一个 Polish 空间，即完全可分度量空间 $\mathscr{S}$，$x,x'\in\mathscr{S}$ 之间的距离为 $\rho(x,x')$，以及由 $\mathscr{S}$ 的全体开子集生成的 σ- 代数 Σ). 设 $\xi=\{\xi_t;t\in\boldsymbol{R}^1\}$ 是概率空间

$$(\Omega,\mathscr{F},P)\longrightarrow(\mathscr{S},\Sigma)$$

的马氏过程，具有正则条件测度族：

$$P(s,t;x,A)\triangleq E(1_A(\xi_t)\,|\,\xi_s=x)\quad(\forall\, s\leqslant t,x\in\mathscr{S},A\in\Sigma).$$

若 $P(s,t;x,A)=P(0,t-s;x,A)(\forall\, x\in\mathscr{S},A\in\Sigma)$，则称 ξ 时齐，并将 $P(0,t-s;x,A)$记为 $P(t-s,x,A)$.

若 $P(s,t;x,A)=\int_A p(s,t;x,y)\mathrm{d}y$，则称 $p(s,t;x,y)$ 为转移

密度函数. 特别当 ξ 时齐时转移密度函数记为 $p(t,x,y)$.

1. 马氏过程对应的半群

令 $B(\mathscr{S}) \triangleq \{f: f$ 是$(\mathscr{S},\Sigma) \to (\mathbf{R}^1,\mathscr{B}_1)$的有界可测函数$\}$，在 $B(\mathscr{S})$ 上定义模

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathscr{S}}|f(x)| \quad (\forall f \in B(\mathscr{S})).$$

下面让我们来定义一族. $B(\mathscr{S})\to B(\mathscr{S})$的算子 $P_{s,t}$:

$$\begin{aligned} P_{s,t}f(x) &= \int P(s,t;x,\mathrm{d}y)f(y) \\ &= E(f(\xi_t)|\xi_s = x) \triangleq E_{x,s}(f(\xi_t)) \quad (\text{参见 § 4.2}). \end{aligned}$$

命题 6.1 算子族$\{P_{s,t}; s\leqslant t\}$具有以下性质:

1) $P_{s,t}$是线性算子;

2) $P_{s,t}$是压缩算子: $\|P_{s,t}\|\leqslant 1$;

3) $P_{s,t}$是正算子:对$\forall\ f\geqslant 0$,有 $P_{s,t}f\geqslant 0$;

4) $P_{s,t}1=1$;

5) $P_{s,s}=I$(恒同算子);

6) 对$\forall\ s\leqslant t\leqslant u$ 有 $P_{s,u}=P_{s,t}\circ P_{t,u}$.

证明 1)～5)是显然的,6)可由转移函数的 Kolmogorov 方程得到

$$\begin{aligned} P_{s,u}f(x) &= \int P(s,u;x,\mathrm{d}z)f(z) \\ &= \iint P(s,t;x,\mathrm{d}y)P(t,u;y,\mathrm{d}z)f(z) \\ &= \int P(s,t;x,\mathrm{d}y)\int P(t,u;y,\mathrm{d}z)f(z) \\ &= P_{s,t}(P_{t,u}f)(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

对于一个时齐马氏过程,它对应的算子族$\{P_{s,t}\}$满足

$$\begin{aligned} P_{s,t}f(x) &= \int P(s,t;x,\mathrm{d}y)f(y) = \int P(0,t-s;x,\mathrm{d}y)f(y) \\ &= P_{0,t-s}f(x). \end{aligned}$$

我们将 $P_{s,t}=P_{0,t-s}$ 记为 P_{t-s}，于是 $\{P_t;t\geqslant 0\}$ 是一个 $B(\mathscr{S})\to B(\mathscr{S})$ 的收缩正算子半群. 令

$$B_0(\mathscr{S})=\{f\in B(\mathscr{S});\|P_tf-f\|\to 0\text{ 当 }t\to 0\text{ 时}\},$$

称 $B_0(\mathscr{S})$ 为 $\{P_t\}$ 的强连续中心.

命题 6.2 时齐马氏过程 ξ 对应的算子半群 $\{P_t\}$ 具有如下性质：

1）$B_0(\mathscr{S})$ 是 $B(\mathscr{S})$ 的闭子空间；

2）$\forall\ t\geqslant 0, P_t(B_0(\mathscr{S}))\subset B_0(\mathscr{S})$；

3）对 $\forall\ f\in B_0(\mathscr{S}), P_\cdot f$ 是 $\boldsymbol{R}^+\to B_0(\mathscr{S})$ 的连续映射；

4）$\{P_t\}$ 可以限制到 $B(\mathscr{S})$ 的闭子空间 $B_0(\mathscr{S})$ 中成为一个单参数、强连续、收缩的正算子半群.

证明 1）设 $f_n\in B_0(\mathscr{S}), \|f_n-f\|\to 0\ (n\to\infty)$，则

$$\|P_tf_n-f_n\|\to 0\ (t\to 0).$$

于是

$$\begin{aligned}\|P_tf-f\|&\leqslant\|P_tf_n-f_n\|+\|P_t(f_n-f)\|+\|f_n-f\|\\&\leqslant\|P_tf_n-f_n\|+2\|f_n-f\|.\end{aligned}$$

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ n_0$ 使得 $\|f_{n_0}-f\|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是

$$\|P_tf-f\|\leqslant\|P_tf_{n_0}-f_{n_0}\|+\varepsilon\to\varepsilon\ (t\to 0),$$

由于 ε 任意给定，$\|P_tf-f\|\to 0(t\to 0)$.

2）对 $\forall\ f\in B_0(\mathscr{S})$，由于 P_t 是收缩的，对 $\forall\ t>0$，

$$\begin{aligned}\|P_s(P_tf)-P_tf\|&=\|P_t(P_sf-f)\|\\&\leqslant\|P_sf-f\|\to 0\ (s\to 0),\end{aligned}$$

可见 $P_tf\in B_0(\mathscr{S})$.

3）设 $t_n\to t$，那么，对 $\forall\ f\in B_0(\mathscr{S})$ 有

$$\begin{aligned}\|P_{t_n}f-P_tf\|&=\|P_{t_n\wedge t}(P_{|t-t_n|}f-f)\|\\&\leqslant\|P_{|t_n-t|}f-f\|\to 0\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

可见 $P_\cdot f$ 是 $\boldsymbol{R}^+\to B_0(\mathscr{S})$ 的连续映射.

4）综合命题 6.1 与本命题 1）～3）的结果就得到 $\{P_t\}$ 是

$B_0(\mathscr{S})\to B_0(\mathscr{S})$的强连续收缩正线性算子半群. ▌

2. 无穷小生成元

考查

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{P_t f-f}{t}\ (\text{按}\|\ \|\text{意义下收敛}) \tag{6.1}$$

并在上面极限存在时,将它记为 $\mathscr{A}f$,称 $\mathscr{A}$ 为无穷小生成元或简称生成元. 这也就是说,由$\{P_t\}$按(6.1)定义一个算子 $\mathscr{A}$(可能无界),并令

$$\mathscr{D}(\mathscr{A})\triangleq\left\{f;\lim_{t\downarrow 0}\frac{P_t f-f}{t}\ \text{存在}\right\},$$

称 $\mathscr{D}(\mathscr{A})$是算子 $\mathscr{A}$ 的定义域. 显然,$\mathscr{D}(\mathscr{A})\subseteq B_0(\mathscr{S})$.

命题 6.3 1) $\mathscr{D}(\mathscr{A})$在 $B_0(\mathscr{S})$中稠;而且对$\forall\ f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$,必有 $\mathscr{A}f\in B_0(\mathscr{S})$;

2) $P_t\mathscr{D}(\mathscr{A})\subset\mathscr{D}(\mathscr{A})$;

3) 对$\forall\ f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$,$P_t f$ 对 t 可微,而且

$$\frac{\mathrm{d}P_t f}{\mathrm{d}t}=P_t\mathscr{A}f=\mathscr{A}P_t f\quad(t\geqslant 0). \tag{6.2}$$

证明 1) 容易看出$\left\{\frac{1}{h}\int_0^h P_s f\mathrm{d}s;\forall\ h\in\boldsymbol{R}^+,f\in B_0(\mathscr{S})\right\}$在 $B_0(\mathscr{S})$中,而且它在 $B_0(\mathscr{S})$中稠. 然而

$$\begin{aligned}&\lim_{t\downarrow 0}\left[\frac{1}{t}\left(P_t\int_0^h P_s f\mathrm{d}s-\int_0^h P_s f\mathrm{d}s\right)-(P_h f-f)\right]\\&\quad=\lim_{t\downarrow 0}\left[\frac{1}{t}\left(\int_t^{t+h}P_s f\mathrm{d}s-\int_0^h P_s f\mathrm{d}s\right)-(P_h f-f)\right]\\&\quad=\lim_{t\downarrow 0}\left[\frac{1}{t}\int_h^{t+h}(P_s f-P_h f)\mathrm{d}s-\frac{1}{t}\int_0^t(P_s f-f)\mathrm{d}s\right].\end{aligned}$$

由于$\|P_r f-f\|$对 r 连续,

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{t}\int_h^{h+t}(P_s f-P_h f)\mathrm{d}s\right\|\\&\quad\leqslant\frac{1}{t}\int_h^{t+h}\|P_{s-h}f-f\|\mathrm{d}s\to 0\quad(\text{当 } t\to 0,h\geqslant 0).\end{aligned}$$

可见 $\frac{1}{h}\int_0^h P_s f \mathrm{d}s \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$，因而 $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ 在 $B_0(\mathscr{S})$ 中亦稠. 另一方面，当 $f \in \mathscr{D}(\mathscr{A}) \subset B_0(\mathscr{S})$ 时，有 $\frac{1}{s}(P_s f - f) \in B_0(\mathscr{S})$，而 $B_0(\mathscr{S})$ 是闭子空间，所以

$$\mathscr{A} f = \lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{s}(P_s f - f) \in B_0(\mathscr{S}).$$

2) $\forall f \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$，$t>0$，由于 $\|P_t\| \leqslant 1$，

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{P_s P_t f - P_t f}{s} = \lim_{s \downarrow 0} P_t\left(\frac{P_s f - f}{s}\right) = P_t \lim_{s \downarrow 0} \frac{P_s f - f}{s} = P_t \mathscr{A} f.$$

可见 $P_t f \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$，$\mathscr{A} P_t f = P_t \mathscr{A} f$；而且对 $\forall$ 实数 s

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{P_{s+t} f - P_t f}{s} - P_t \mathscr{A} f\right\| \\
&\leqslant \left\|\frac{P_{t \wedge (t+s)}(P_{|s|} f - f)}{|s|} - P_{t \wedge (t+s)} \mathscr{A} f\right\| \\
&\quad + \|P_{t \wedge (t+s)} \mathscr{A} f - P_t \mathscr{A} f\| \\
&\leqslant \left\|\frac{P_{|s|} f - f}{|s|} - \mathscr{A} f\right\| + \|P_{t \wedge (t+s)} \mathscr{A} f - P_t \mathscr{A} f\| \to 0
\end{aligned}$$

（当 $s \to 0$），可见对 $t>0$，

$$\frac{\mathrm{d} P_t f}{\mathrm{d} t} = P_t \mathscr{A} f = \mathscr{A} P_t f.$$

于是 3) 与 2) 同时得证. ▌

由命题我们立即得到下面的推论.

推论 设 $\mathscr{C}(\mathscr{S}) \subset B_0(\mathscr{S})$（强连续中心），则 $\mathscr{C}(\mathscr{S}) \cap \mathscr{D}(\mathscr{A})$ 在 $\mathscr{C}(\mathscr{S})$ 中稠，其中 $\mathscr{C}(\mathscr{S})$ 是 $\mathscr{B}(\mathscr{S})$ 中的连续函数集.

例 6.1 设 $\mathscr{B}_0 \subset B(\mathscr{S})$ 是一个闭子空间，$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}_0$ 上的一个有界线性算子，令

$$P_t f \triangleq \mathrm{e}^{t\mathscr{A}} \cdot f \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\mathscr{A})^k}{k!} f \quad (\forall f \in \mathscr{B}_0),$$

则 $\{P_t\}$ 是 $\mathscr{B}_0$ 上的算子半群，它的无穷小生成元是 $\mathscr{A}$.

证明 由

$$\begin{aligned}
P_{s+t}f &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(s+t)^k\mathscr{A}^k}{k!}f \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}C_k^n\frac{1}{k!}t^ns^{k-n}\mathscr{A}^kf \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{n!l!}t^ns^l\mathscr{A}^{n+l}f \quad (l=k-n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathscr{A}^n\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{s^l}{l!}\mathscr{A}^lf\right) = P_t(P_sf),
\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}
\lim_{t\downarrow 0}\left\|\frac{1}{t}(\mathrm{e}^{t\mathscr{A}}-I)f-\mathscr{A}f\right\| &\leqslant \lim_{t\downarrow 0}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k\|\mathscr{A}^k\|}{k!}\|f\| \\
&= \lim_{t\downarrow 0}(\mathrm{e}^{t\|\mathscr{A}\|}-1-t\|\mathscr{A}\|)=0,
\end{aligned}$$

可见$\{P_t\}$是半群,并以 $\mathscr{A}$ 为生成元.

显然,一般说来,当 $\mathscr{A}$ 是无界算子时,上面这种半群与生成元的关系是不能成立的.

在讨论生成元与半群的关系时,下面的预解算子起了很重要的作用. 定义

$$R_\lambda f = \int_0^{+\infty}(P_tf)\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t \quad (\forall\ f\in B_0(\mathscr{S})), \tag{6.3}$$

由 P_tf 对 t 连续,显然对 $\lambda>0$,(6.3)右端有定义,并且

$$\|R_\lambda f\| \leqslant \int_0^{+\infty}\|P_tf\|\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty}\|f\|\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{\|f\|}{\lambda}.$$

命题 6.4 R_λ 有以下性质:

1) $\|R_\lambda\|\leqslant\frac{1}{\lambda}$ $(\lambda>0)$;

2) 对$\forall\ f\in B_0(\mathscr{S})$,$R_\lambda f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$,而且

$$(\lambda I-\mathscr{A})R_\lambda f = f,$$

从而

$$B_0(\mathscr{S}) = (\lambda I-\mathscr{A})\mathscr{D}(\mathscr{A});$$

3) 若 $f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$,则 $R_\lambda(\lambda I-\mathscr{A})f=f$,从而

$$R_\lambda B_0(\mathscr{S}) = \mathscr{D}(\mathscr{A}).$$

证明 1）显然.

2）对$\forall f\in B_0(\mathscr{S})$，

$$\left\|\frac{1}{h}(P_hR_\lambda f-R_\lambda f)-(\lambda R_\lambda f-f)\right\|$$

$$=\left\|\frac{1}{h}\left[\left(e^{\lambda h}R_\lambda f-e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t}P_tf\mathrm{d}t\right)-R_\lambda f\right]-(\lambda R_\lambda f-f)\right\|$$

$$\leqslant\frac{1}{h}(e^{\lambda h}-1-\lambda h)\|R_\lambda f\|+\left\|\frac{1}{h}e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t}P_tf\mathrm{d}t-f\right\|$$

$$\leqslant\frac{1}{h\lambda}(e^{\lambda h}-1-\lambda h)\|f\|+\int_0^1 e^{\lambda h(1-s)}\|P_{hs}f-f\|\mathrm{d}s$$

$$+\left|\int_0^1(e^{\lambda h(1-s)}-1)\mathrm{d}s\right|\|f\|\to 0\ (h\downarrow 0),$$

可见$R_\lambda f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$，而且

$$\mathscr{A}R_\lambda=\lambda R_\lambda f-f\in B_0(\mathscr{S}),$$

于是

$$(\lambda I-\mathscr{A})R_\lambda f=f\ (\forall f\in B_0(\mathscr{S})).$$

3）对$f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$，有

$$R_\lambda\mathscr{A}f=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P_t\mathscr{A}f\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{\mathrm{d}P_tf}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

$$=e^{-\lambda t}P_tf\Big|_0^\infty-\int_0^\infty(P_tf)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-\lambda t})\mathrm{d}t$$

$$=-f+\lambda R_\lambda f,$$

即
$$R_\lambda(\lambda I-\mathscr{A})f=f.\ \blacksquare$$

在大部分应用问题中，往往是先知道无穷小生成元$\mathscr{A}$在某些函数上的值，而希望由此决定半群$\{P_t\}$与过程的转移函数$\{P(t;x,\mathrm{d}y)\}$，例如Brown运动，在它的早期研究中，物理学家们从对称性与空间的均匀性及观察结果等的分析知道（见第一章）：对于具有有界一致连续二阶导数的函数f，$\mathscr{A}f=\frac{1}{2}f''(x)$. 现在要问，由此能否确定$P(t;x,\mathrm{d}y)$？在第一章中，对Brown运动这个特殊情况，我们导出了

$$P(t;x,\mathrm{d}y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}\mathrm{d}y,$$

这样问题就解决了. 但是,对一般的马氏过程,问题就远非如此简单. 一般地,要想得到$\{P(t;x,\mathrm{d}y)\}$的显式表示是极端困难的. 而理论上解决这个问题的基本思想与原则可由下面著名的定理得到.

定理 6.5(Hille-Yosida 定理) 设 E 是一个函数的 Banach 空间,$\mathscr{A}$ 是 E 上以 $\mathscr{D}(\mathscr{A})$为定义域的线性算子. $\mathscr{A}$ 可以是 E 上一个强连续、收缩正半群$\{P_t\}$的无穷小生成元当且仅当以下条件成立:

1) $\mathscr{D}(\mathscr{A})$在 E 中稠;

2) 对$\forall\ \lambda>0$,$(\lambda I-\mathscr{A})^{-1}$在 E 上处处有定义;

3) 对$\forall\ \lambda>0$,$(\lambda I-\mathscr{A})^{-1}$是正算子(即它将非负函数映为非负函数);

4) $\|(\lambda I-\mathscr{A})^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\lambda}$.

证明 1)~3)的必要性由命题 6.4 可见. 4)的必要性是由于$(\lambda I-\mathscr{A})^{-1}$是 P_t 的 Laplace 变换.

充分性的证明:基本思想是:当 $\mathscr{A}$ 有界,令 $P_t=\mathrm{e}^{\mathscr{A}t}$即可;对无界的 $\mathscr{A}$,先给出有界的 $\mathscr{A}_\lambda$ 去逼近 $\mathscr{A}$,并进而以 $\mathrm{e}^{\mathscr{A}_\lambda t}$逼近 P_t.

1) 令

$$\mathscr{A}_\lambda=\lambda\mathscr{A}R_\lambda\ (\text{其中 } R_\lambda\triangleq(\lambda I-\mathscr{A})^{-1}).$$

首先注意到对$\forall\ \lambda>0$,

$$\lambda R_\lambda g-\mathscr{A}R_\lambda g=g\quad(\forall\ g\in E),$$

$$\lambda R_\lambda f-R_\lambda\mathscr{A}f=f\quad(\forall\ f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})),$$

于是

$$\mathscr{A}R_\lambda g=R_\lambda\mathscr{A}g\quad(\forall\ g\in\mathscr{D}(\mathscr{A})).$$

可见

$$\mathscr{A}_\lambda g=\lambda\mathscr{A}R_\lambda g=\lambda(\lambda R_\lambda g-g)\quad(\forall\ g\in\mathscr{D}(\mathscr{A})).$$

即 $\mathscr{A}_\lambda$ 是有界线性算子：

$$\| \mathscr{A}_\lambda g \| \leqslant \lambda^2 \| R_\lambda g \| + \lambda \| g \| \leqslant 2\lambda \| g \|.$$

另一方面，从

$$\begin{aligned}\lambda R_\lambda R_\mu g &= \mathscr{A} R_\lambda R_\mu g + R_\mu g = R_\lambda \mathscr{A} R_\mu g + R_\mu g \\ &= R_\lambda(\mu R_\mu g - g) + R_\mu g = \mu R_\lambda R_\mu g + (R_\mu - R_\lambda) g\end{aligned}$$

可见，下述的预解方程式成立(它是 P_t 的半群性在预解式上的描述)：

$$R_\lambda R_\mu = \frac{R_\mu - R_\lambda}{\lambda - \mu} = \frac{R_\lambda - R_\mu}{\mu - \lambda} = R_\mu R_\lambda.$$

此外，对 $f \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$，

$$\| \lambda R_\lambda f - f \| = \| R_\lambda \mathscr{A} f \| \leqslant \frac{1}{\lambda} \| \mathscr{A} f \|.$$

而且对 $f \in E$，可取 $f_1 \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$，使 $\| f - f_1 \| < \frac{\varepsilon}{3}$. 于是

$$\begin{aligned}\| \lambda R_\lambda f - f \| &\leqslant \| \lambda R_\lambda (f - f_1) \| + \| \lambda R_\lambda f_1 - f_1 \| + \| f_1 - f \| \\ &\leqslant 2 \| f - f_1 \| + \| \lambda R_\lambda f_1 - f_1 \| \\ &\leqslant 2 \| f - f_1 \| + \frac{1}{\lambda} \| \mathscr{A} f_1 \| \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{1}{\lambda} \| \mathscr{A} f_1 \|,\end{aligned}$$

因此，对$\forall\ \varepsilon > 0$，只要 $\lambda > 3\,\frac{\| \mathscr{A} f_1 \|}{\varepsilon}$，就有

$$\| \lambda R_\lambda f - f \| \leqslant \varepsilon \ (\forall\ f \in E).$$

也就是

$$\lambda R_\lambda f \to f \ (\lambda \to +\infty),$$

即

$$\mathscr{A}_\lambda f = \lambda R_\lambda \mathscr{A} f \to \mathscr{A} f \ (\lambda \to +\infty),\ \forall\ f \in \mathscr{D}(\mathscr{A}).$$

2) 令 $P_t^\lambda = \mathrm{e}^{t\mathscr{A}_\lambda}$，则 P_t 显然是 E 上的收缩正半群，而且

$$\| P_t^\lambda \| = \| \mathrm{e}^{\lambda t(\lambda R_\lambda - I)} \| \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{e}^{t\lambda^2 \| R_\lambda \|} \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t + \lambda t} = 1.$$

如能证明

$$\| P_t^\lambda f - P_t^\mu f \| \leqslant t \| \mathscr{A}_\lambda f - \mathscr{A}_\mu f \|,$$

就立即得到在强收敛意义下对 t 局部一致地有

$$\lim_{\lambda \to \infty} P_t^\lambda (\triangleq P_t) \text{ 存在,而且是收缩正半群.}$$

这一估计式的推导如下:由于 $\mathscr{A}_\lambda \mathscr{A}_\mu = \mathscr{A}_\mu \mathscr{A}_\lambda$,

$$\begin{aligned}
\| P_t^\lambda f - P_t^\mu f \| &= \| e^{t\mathscr{A}_\lambda} f - e^{t\mathscr{A}_\mu} f \| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k-1}{n} t\mathscr{A}_\lambda + \frac{n-k}{n} t\mathscr{A}_\mu} \left(e^{\frac{t}{n}\mathscr{A}_\lambda} f - e^{\frac{t}{n}\mathscr{A}_\mu} f \right) \right\| \\
&\leqslant n \left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left\| P_{\frac{k-1}{n}t}^\lambda \right\| \left\| P_{\frac{n-k}{n}t}^\mu \right\| \left\| e^{\frac{t}{n}\mathscr{A}_\lambda} f - e^{\frac{t}{n}\mathscr{A}_\mu} f \right\| \right) \\
&\leqslant t \left\| \frac{e^{\frac{t}{n}\mathscr{A}_\lambda} f - e^{\frac{t}{n}\mathscr{A}_\mu} f}{\frac{t}{n}} \right\| \to t \| \mathscr{A}_\lambda f - \mathscr{A}_\mu f \| \ (n \to \infty).
\end{aligned}$$

再则 $\| P_t f - f \| \leqslant \| P_t f - P_t^\lambda f \| + \| P_t^\lambda f - f \|$,

容易看出 $\lim\limits_{t \downarrow 0} \| P_t f - f \| = 0$,即 $\{P_t\}$ 强连续.

3) 对 $f \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$,显然有

$$P_t^\lambda f - f = \int_0^t P_s^\lambda \mathscr{A}_\lambda f \mathrm{d}s.$$

再由 2)中 $P_t^\lambda f \to P_t f (\lambda \to \infty)$ 有

$$\begin{aligned}
&\| P_s \mathscr{A} f - P_s^\lambda \mathscr{A}_\lambda f \| \\
&\quad \leqslant \| P_s \mathscr{A} f - P_s^\lambda \mathscr{A} f \| + \| P_s^\lambda \mathscr{A} f - P_s^\lambda \mathscr{A}_\lambda f \| \\
&\quad \leqslant \| P_s \mathscr{A} f - P_s^\lambda \mathscr{A} f \| + \| \mathscr{A} f - \mathscr{A}_\lambda f \| \to 0 \ (\lambda \to \infty).
\end{aligned}$$

从而

$$P_t f - f = \lim_{\lambda \to \infty} (P_t^\lambda f - f) = \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^t P_s^\lambda \mathscr{A}_\lambda f \mathrm{d}s = \int_0^t P_s \mathscr{A} f \mathrm{d}s.$$

最后,由 P_t 对 t 的连续性就立即得到

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\| \frac{P_t f - f}{t} - \mathscr{A} f \right\| = 0. \quad \blacksquare$$

在定理中,若 $P_t f = \int P(t; x, \mathrm{d}y) f(y)$,则

$$P_t 1 = \int P(t; x, \mathrm{d}y) = 1.$$

于是，$1 \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$，而且 $R_\lambda 1 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t 1 \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$.

从上面的定理我们知道，我们可以通过一个马氏过程的半群的无穷小生成元来研究过程. 而且只有满足下面的这些条件的线性算子 $\mathscr{A}$ 才可能是马氏过程的半群的生成元：$\lambda I - \mathscr{A}$ 在 $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ 上有逆：

$$R_\lambda = (\lambda I - \mathscr{A})^{-1};$$

R_λ 是正算子，$R_\lambda 1 = \frac{1}{\lambda}\left(\text{对准马氏过程，则应改为 } R_\lambda 1 \leqslant \frac{1}{\lambda}\right)$，$\| R_\lambda \| \leqslant \frac{1}{\lambda}$，而且

$$R_\lambda f = \int f(y) G_\lambda(\mathrm{d}y),$$

其中测度 $G_\lambda(\mathrm{d}y)$ 是 $P(t;x,\mathrm{d}y)$ 的拉氏变换：

$$G_\lambda(A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(t;x,A)\mathrm{d}t.$$

特别当 $G_\lambda(A) = \int_A g(\lambda,x,y)\mathrm{d}y$ 时，称 $\{g(\lambda,x,y)\}$ 为 $\mathscr{A}$（或半群 $\{P_t\}$）的 λ-Green 函数. 又若 $g(0,x,y) < +\infty$，则称之为 Green 函数.

例 6.2 BM^1 的 λ-Green 函数为

$$g(\lambda,x,y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|y-x|^2}{2t}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|}. \tag{6.4}$$

正如我们研究 BM^d 的半群及其生成元时见到的，生成元 $\mathscr{A}$ 的定义域并不能知道. 然而只要知道 $\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ 的一个稠集上的像，$\mathscr{A}$ 也就完全确定了. 下面的例子说明怎样由 Hille-Yosida 定理构造半群.

例 6.3 设算子 $\mathscr{A}$ 满足条件

$$C_0^2(r_1,r_2) \subset \mathscr{D}(\mathscr{A}) \subset C_0(r_1,r_2)$$

（其中 $C_0^2(r_1,r_2)$，$C_0(r_1,r_2)$ 分别记 (r_1,r_2) 上紧支集 2 次可微函数

类及紧支集连续函数类），而且对 $f\in C_0^2(r_1,r_2)$，

$$\mathscr{A}f=(af')'+bf' \quad (a>0,a,b\text{ 依赖 }x). \tag{6.5}$$

又设方程 $\lambda f-\mathscr{A}f=0$ 具有两个线性独立解 u_1^λ,u_2^λ，满足条件：

1）u_i^λ 单调，非负，有界；

2）$u_1^\lambda(r_1+)=u_2^\lambda(r_2-)=0$.

则存在强连续收缩正半群 $\{P_t\}$，以 $C_0(r_1,r_2)$ 为定义域，以 $\mathscr{A}$ 为生成元，而且这时 $\mathscr{A}$ 的 λ-Green 函数为

$$g(\lambda,x,y)=\begin{cases}\beta u_1^\lambda(x)u_2^\lambda(y), & r_1<x\leqslant y<r_2;\\ \beta u_2^\lambda(x)u_1^\lambda(y), & r_1<y<x<r_2,\end{cases}$$

其中 β 为某一与 x,y 无关的常数.

证明 1）先设例中要求的半群存在，那么由于它强连续，$\mathscr{D}(\mathscr{A})$ 就一定在半群的定义域 E 中稠；但是 $C_0^2(r_1,r_2)(\subset\mathscr{D}(\mathscr{A}))$ 也在 $C_0(r_1,r_2)$ 中稠，可见

$$C_0(r_1,r_2)\subset\overline{C_0^2(r_1,r_2)}\subset E\subset C_0(r_1,r_2),$$

即
$$E=C_0(r_1,r_2).$$

2）为证明半群的存在性，只要验证定理 6.5(Hille-Yosida) 的条件满足即可. 注意到

$$\begin{aligned}\varphi(x)&\triangleq\int_{r_1}^{r_2}g(\lambda,x,y)f(y)\mathrm{d}y \quad (\forall f\in C_0(r_1,r_2))\\ &=\beta\left(u_1^\lambda(x)\int_x^{r_2}u_2^\lambda(y)f(y)\mathrm{d}y+u_2^\lambda(x)\int_{r_1}^x u_1^\lambda(y)f(y)\mathrm{d}y\right)\end{aligned}$$

是方程

$$\begin{cases}(\lambda I-\mathscr{A})\varphi=f,\\ \varphi(r_1)=\varphi(r_2)=0\end{cases} \tag{6.6}$$

的唯一解（读者可由常数变易法得到或直接验证

$$[\beta w(u_1'u_2-u_2'u_1)]'=0,\quad w(x)=\exp\int_{\frac{r_1+r_2}{2}}^x\frac{b(u)}{a(u)}\mathrm{d}u.$$

再取 β 使得 $\beta w(u_1'u_2-u_2'u_1)=1$ 即可得这一结论）. 于是 $(\lambda I-\mathscr{A})^{-1}$ 在 $C_0(r_1,r_2)$ 上的存在性与非负性都成立了. 余下只需证明

$\|(\lambda I-\mathscr{A})^{-1}f\|\leqslant\lambda^{-1}\|f\|$，其实，只要对非负的 f 证明这一点即可．为此，令

$$\varphi(x)=(\lambda I-\mathscr{A})^{-1}f,\ \|\varphi\|=\max\varphi(x)=\varphi(x_0),$$

于是 $\varphi'(x_0)=0,\varphi''(x_0)\leqslant 0$；

$$\begin{aligned}\|f\| &= \|(\lambda I-\mathscr{A})\varphi\| \geqslant (\lambda I-\mathscr{A})\varphi(x_0)\\ &= \lambda\varphi(x_0)-a\varphi''(x_0)\geqslant\lambda\varphi(x_0)\\ &= \lambda\|\varphi\| = \lambda\|(\lambda-\mathscr{A})^{-1}f\|,\end{aligned}$$

即 $\|(\lambda-\mathscr{A})^{-1}\|\leqslant\lambda^{-1}$．利用 Hille-Yosida 定理就可得到以 $\mathscr{A}$ 为生成元的半群 $\{P_t\}$．

得到了半群 $\{P_t\}$ 后，还需进一步构造准马氏过程．一般来说，由形式生成元去构造准马氏过程是比较复杂的．下面我们通过两个近乎平庸的例子（此情况可彻底解决）给予读者一点感性认识，并由此指出一般地解决问题的关键所在．

例 6.4 作为例 6.3 的特例，设 $C_0^2(0,+\infty)\subset\mathscr{D}(\mathscr{A}_1)\subset C_0(0,+\infty)$，而且 $\mathscr{A}_1f=\frac{1}{2}f''(f\in C_0^2(0,+\infty))$，则 $\mathscr{A}_1$ 是以

$$\left\{p(t;x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right)-\exp\left(-\frac{|x+y|^2}{2t}\right)\right],\right.$$

$$\left.x,y\in[0,+\infty)\right\}$$

为转移密度函数族的准马氏过程的生成元．

证明 取

$$u_1(x)\triangleq \mathrm{e}^{\sqrt{2\lambda}x}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}x},$$

$$u_2(x)\triangleq \mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}x},$$

$$w=\mathrm{e}^{\int_0^x\frac{b}{a}\mathrm{d}x}=1,$$

$$\beta w(u_1'u_2-u_2'u_1)=\frac{1}{2}u_1(0)u_2(0)=\sqrt{2\lambda}$$

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{2\lambda}},$$

满足例 3 要求，于是

$$g(\lambda,x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}(\mathrm{e}^{\sqrt{2\lambda}y}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}y})\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}x}, & x>y>0;\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}(\mathrm{e}^{\sqrt{2\lambda}x}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}x})\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}y}, & y\geqslant x>0\end{cases}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}(\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}|y+x|})$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big[\exp\Big(-\frac{(y-x)^2}{2t}\Big)-\exp\Big(\frac{-(y+x)^2}{2t}\Big)\Big]\mathrm{d}t. \tag{6.7}$$

例 6.5 令 $\bar{E}=\{f\in C(0,+\infty);f(+\infty)=0,f'(0+)=0\}$，而且当 $f\in C_0^2(0,+\infty)$，$\mathscr{A}_2f=\frac{1}{2}f''$，则以 $\bar{E}$ 为定义域，以 $\mathscr{A}_2$ 为生成元的半群$\{P_t\}$对应的马氏过程有转移密度族

$$\Big\{p(t;x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\Big(\exp\Big(-\frac{|y-x|^2}{2t}\Big)+\exp\Big(-\frac{|y+x|^2}{2t}\Big)\Big);$$

$$x,y\in[0,+\infty)\Big\}.$$

下面我们将看到这正是反射 Brown 运动.

证明 与例 6.3 类似，当例 6.3 中 u_i 的边界条件 2)改为：

$$u_1'(0+)=0,\quad u_2(+\infty)=0,$$

则

$$\varphi(x)=\int g(\lambda,x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

$$=u_1\int_x^\infty u_2(y)f(y)\mathrm{d}y+u_2\int_0^x u_1(y)f(y)\mathrm{d}y$$

是

$$\begin{cases}\lambda\varphi-\mathscr{A}_2\varphi=f,\\ \varphi'(0+)=0,\varphi(+\infty)=0\end{cases}$$

的唯一解. 事实上，令

$$\begin{cases} u_1(x) = e^{\sqrt{2\lambda}x} + e^{-\sqrt{2\lambda}x}, \\ u_2(x) = e^{-\sqrt{2\lambda}x} \end{cases}$$

即满足上述条件. 这时 λ-Green 函数是

$$g(\lambda,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}(e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|} + e^{-\sqrt{2\lambda}(y+x)}).$$

而半群的定义域为 E,于是

$$p(t;x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-\frac{|y-x|^2}{2t}} + e^{-\frac{|y+x|^2}{2t}}\right)(x,y \in [0,+\infty)).$$

例 6.4 与例 6.5 中所得的两个过程的生成元在 $C_0^2(0,+\infty)$ 上都是

$$Lf \triangleq \frac{1}{2}f'' \quad (f \in C_0^2(0,+\infty)),$$

则 $L \subset \mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2$. 又由于 $C_0(0,+\infty)$是含 $C_0^2(0,+\infty)$的最小子空间,可见 $\mathscr{A}_1$ 是 L 的最小扩张,而 $\mathscr{A}_2$ 是一个较大的扩张. 这个道理和同一个 Q-矩阵决定的 Q-过程的不唯一性是一样的. 注意到对 BM^1 初达 0 的时刻 τ 用反射原理得到

$$P_x(\omega : \tau(\omega) < t, B_t \in (y, y+\mathrm{d}y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(y+x)^2}{2t}}\mathrm{d}y,$$

可见例 6.4 中的边界条件 $f(0)=0$ 意味着一旦过程到达 0,就被截止(所以它是最小解);而条件 $f'(0)=0$ 意味着过程一旦到达 0 就被反射回来(参见下一节例). 当然我们还可以给出多种多样的边界条件,而得到 L 的不同扩张作为过程的生成元.

总结例 6.4,例 6.5,我们得到过程的步骤是:

1) 对给定好的边界条件,求出预解算子,并设法用 Hille-Yosida 定理求出半群. 在一般情况下,不能给出$(\lambda I-\mathscr{A})^{-1}$的显式表达,而只能抽象地设法证明 Hille-Yosida 定理条件满足,其中的难点在于证明$(\lambda I-\mathscr{A})^{-1}$的存在性及其模的估计.

2) 一般情况下,不能求出 λ-Green 函数,而只能由半群设法证明转移函数存在. 对于 $C_0(\mathscr{S})$或 L_2 上的强连续半群可由 Riesz

表示定理设法得到转移函数，但是这样得到的转移函数，除非能保证它们有某种连续性，否则一般只能证明它们是几乎处处满足 Kolmogorov 方程的，但这还达不到马氏过程的转移函数族的要求. 此外，在某些情况下这一步是很难实现的. 这说明了由强收敛意义下的生成元去找过程这一方法有弱点. 为此，下一段中，我们考虑马氏过程的鞅问题与弱生成元.

3. 鞅问题与弱生成元

上段中，无穷小生成元是按 $B(\mathscr{S})$ 中的强收敛定义的，因而它的定义域比较小，而且较难确定. 特别是，在很多情况下，问题往往是要求对已知的形式无穷小生成元去找出其相应马氏过程. 这时，能够给出一个要求较弱的类似无穷小生成元的刻画就很方便. Stroock-Varadhan[SV]提出了马氏过程的鞅问题的模型，为在马氏过程中使用鞅方法开了路. 下面我们来介绍鞅问题的模型.

首先，注意到(6.2)还可以写成积分形式：

$$P_t f(x) = f(x) + \int_0^t \mathscr{A} P_s f(x) \mathrm{d}s$$

$$= f(x) + \int_0^t P_s \mathscr{A} f(x) \mathrm{d}s,$$

也就有

$$E(f(\xi_t) | \xi_0 = x) = f(x) + \int_0^t E(\mathscr{A} f(\xi_s) | \xi_0 = x) \mathrm{d}s.$$

由马氏性与时齐性就得到

$$E((f(\xi_t) - f(\xi_s) - \int_s^t \mathscr{A} f(\xi_u) \mathrm{d}u) | \mathscr{F}_s) = 0.$$

可见对 $f \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$，$\left\{ f(\xi_t) - \int_0^t \mathscr{A} f(\xi_u) \mathrm{d}u, \mathscr{F}_t \right\}$ 是鞅. 例如对 BM^1，我们知道，当 $f \in C_u^2(\boldsymbol{R}^1)$，$\left\{ f(B_t) - \int_0^t \frac{1}{2} f''(B_u) \mathrm{d}u, \mathscr{F}_t \right\}$ 是鞅. 其实，$f \in C_u^2(\boldsymbol{R}^1)$ 并不是必要的，对于 $f \in C_b^2(\boldsymbol{R}^1)$（二次导数有

界连续的全体)，$\left\{f(B_t)-\int_0^t \frac{1}{2}f''(B_u)\mathrm{d}u,\mathscr{F}_t\right\}$也是鞅. 这就意味着在强收敛意义下，$\lim\limits_{t\downarrow 0}\left(\frac{P_tf-f}{t}-\frac{1}{2}f''\right)=0$这一要求太强，似应予减弱. 鞅问题的模型正可达此目的. 令

$$\widetilde{\mathscr{B}}_0(\mathscr{S})=\{f\in\mathscr{B}(\mathscr{S});\lim_{t\downarrow 0}P_tf(x)=f(x),\forall\ x\in\mathscr{S}\}$$

(称为$\{P_t\}$的弱连续中心)，

$$\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}})=\left\{f;\lim_{t\downarrow 0}\frac{P_tf(x)-f(x)}{t}=g(x)\in\mathscr{B}(\mathscr{S}),\right.$$

$$\left.\text{在有界收敛意义下存在}\right\},$$

这里有界收敛指对$\forall\ x\in\mathscr{S}$收敛，而且$\left|\frac{P_tf(x)-f(x)}{t}\right|\leqslant C(\forall\ x\in\mathscr{S},x>0)$. 显然，$\mathscr{D}(\mathscr{A})\subset\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}})$. 当$f\in\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}})$，记

$$\widetilde{\mathscr{A}}f(x)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{P_tf(x)-f(x)}{t}.$$

$\widetilde{\mathscr{A}}$也称为弱生成元. 显然有右导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial^+P_tf(x)}{\partial t}&=\lim_{s\downarrow 0}\frac{P_{t+s}f(x)-P_tf(x)}{s}\\&=\lim_{s\downarrow 0}\int P(t;x,\mathrm{d}y)\int\frac{P(s;y,\mathrm{d}z)}{s}\cdot(f(z)-f(y))\\&=P_t\widetilde{\mathscr{A}}f=\widetilde{\mathscr{A}}P_tf.\end{aligned}\tag{6.8}$$

关于此类鞅与半群的关系，我们有下面的命题.

命题 6.6 设有时齐马氏过程$(\xi_t,\mathscr{F}_t)$，对$f\in\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}})$，令

$$M_t\triangleq f(\xi_t)-f(\xi_0)-\int_0^t\widetilde{\mathscr{A}}f(\xi_u)\mathrm{d}u,$$

则$\{M_t,\mathscr{F}_t\}$是鞅；反之，当$\{\xi_t\}$具有右连续轨道，如果存在$\mathscr{S}$上的有界连续函数$g(x)$，使得

$$\left\{f(\xi_t)-f(\xi_0)-\int_0^t g(\xi_u)\mathrm{d}u,\mathscr{F}_t\right\}$$

是鞅，那么 $f\in\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}})$，而且 $\widetilde{\mathscr{A}}f=g$.

证明 由(6.8)积分得到

$$P_tf-P_sf=\int_s^t P_u\widetilde{\mathscr{A}}f\mathrm{d}u,$$

即
$$E_x\left(f(\xi_t)-f(\xi_s)-\int_s^t\widetilde{\mathscr{A}}f(\xi_u)\mathrm{d}u\,|\,\mathscr{F}_s\right)=0$$

对 $f\in\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}})$ 成立，可见命题第一部分成立.

另一方面，当 $\left\{f(\xi_t)-f(\xi_0)-\int_0^t g(\xi_u)\mathrm{d}u,\mathscr{F}_t\right\}$ 是鞅，就有

$$\left|\frac{1}{t}(P_tf(x)-f(x))\right|=\left|\frac{1}{t}E_x(f(\xi_t)-f(\xi_0))\right|$$
$$=\left|E_x\left(\frac{1}{t}\int_0^t g(\xi_u)\mathrm{d}u\right)\right|\leqslant\|g\|,$$

而且由 $\{\xi_t\}$ 轨道右连续，$g(\xi_s)$ 右连续，就有

$$\frac{1}{t}(P_tf(x)-f(x))=\frac{1}{t}E_x(f(\xi_t)-f(\xi_0))$$
$$=\frac{1}{t}\int_0^t E_x(g(\xi_s))\mathrm{d}s\to g(x)\quad(t\to 0,\text{有界收敛}).\ \blacksquare$$

上面的命题说明：由形式生成元限定的弱生成元去构造过程，也可化为解如下鞅问题：找一个过程 $\xi\triangleq\{\xi_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$ 使得

$$\left\{f(\xi_t)-f(\xi_0)-\int_0^t\widetilde{\mathscr{A}}f(\xi_u)\mathrm{d}u,\mathscr{F}_t\right\}$$

是鞅，对 f 在 $C_b(\mathscr{S})$ 的一个稠集（有界收敛意义下）上都成立（例如 $C_0^\infty(\mathscr{S})$）.

用解鞅问题的方法去构过程是将构造半群、转移概率及构造过程三者合在一起，一气呵成的. 通常是先求简单的近似过程，再用鞅收敛定理得到所求过程 ξ. 为得到 ξ 的马氏性，还需要有鞅问题解的唯一性.

命题 6.7（最大值原理） 设 $f\in\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}})$，而且

$$f(x_0)=\sup_{x\in\mathscr{S}}f(x)=\max_{x\in\mathscr{S}}f(x),$$

则$\widetilde{\mathscr{A}}f(x_0)\leqslant 0$.

证明 显然$f(x_0)\geqslant f(\xi_t)$,于是

$$\frac{1}{t}(P_tf(x_0)-f(x_0))=\frac{1}{t}(E_{x_0}f(\xi_t)-f(x_0))$$

$$\leqslant\frac{1}{t}(f(x_0)-f(x_0))=0,$$

所以$\widetilde{\mathscr{A}}f(x_0)\leqslant 0$. ▌

§2 强马氏性、过程的截止与 Feymann-Kac 公式

1. 推移算子与强马氏性

在讨论马氏过程沿轨道的性质时,利用第一章§1.3中引入的推移算子是很方便的,而且它对于其它过程的研究也有益.假定T对加法封闭.

设$\Omega=\mathscr{S}^T$,令θ_t是$\Omega\to\Omega$的映射.对$\omega=\{\omega_t;t\in T\}\in\Omega$,令$\theta_s\omega=\{\omega_{t+s};t\in T\}$.

一般地,对$(\Omega,\mathscr{B},P)$上的随机过程ξ,设ξ的相空间是$\mathscr{S}$,时间参数取值于T,则不妨将过程看作$\tilde{\Omega}=\mathscr{S}^T$上定义的过程,这时推移算子$\theta_t$应有

$$\xi_t(\theta_s\omega)=\xi_{t+s}(\omega).$$

例如对时齐马氏过程ξ,我们应有

$$E(f(\xi_{t+s}(\omega))|\mathscr{F}_s)=E_xf(\xi_t)|_{x=\xi_s}$$

$$=\theta_sE_{\xi_0}f(\xi_t)=\theta_sE(f(\xi_t)|\mathscr{F}_0). \tag{6.9}$$

对时齐强马氏过程ξ,有界可测函数f,$t\in\boldsymbol{R}^+$及停时τ,在$\{\omega;\tau(\omega)<+\infty\}$上

$$E(f(\xi_{t+\tau})|\mathscr{F}_\tau)=\theta_\tau E(f(\xi_t)|\mathscr{F}_0), \tag{6.10}$$

其中$\theta_\tau\varphi(\omega)=[\theta_t\varphi(\omega)]_{t=\tau}$.又设$\eta$是对$\mathscr{F}_\tau$可测,取值于$T$中的随

机变量，$0\leqslant\eta(\omega)<+\infty$. 则

$$E(f(\xi_{\eta+\tau})|\mathscr{F}_\tau)=E(f(\xi_{t+\tau})|\mathscr{F}_\tau)|_{t=\eta}=\theta_\tau E_{\xi_0}(f(\xi_t))|_{t=\eta}$$

$$=\int P(\eta,\xi_\tau,\mathrm{d}y)f(y).$$

2. 具有强马氏性的条件

我们在第四章中已经看到，对于只有可列个取值的停时 τ，马氏过程永远有强马氏性. 一般地，并非所有马氏过程有强马氏性. 本段指出，对一个轨道右连续的马氏过程，在其转移函数（半群）上附加什么条件就能保证有强马氏性.

定义 6.1（Feller 过程与 Feller 半群） 转移函数族 $\{P(t;x,A)\}$（或相应半群 $\{P_t\}$）称为具有 Feller 性（对应地：强 Feller 性），如果对$\forall\ t>0$ 及有界连续函数 f（对应地：有界可测函数 f），都使 P_tf 有界连续. 若马氏过程对应的半群是 Feller 半群（对应地：强 Feller 半群），则称为 Feller 过程（对应地：强 Feller 过程）.

显然，这意味着 Feller 过程的转移概率测度 $P(t;x,\cdot)$当 $x\to x_0$ 时弱收敛到测度 $P(t;x_0,\cdot)$，也即 $P(t,x,\cdot)$对 x 弱连续.

定理 6.8 设马氏过程 $\xi=\{\xi_t,\mathscr{F}_t,t\in\boldsymbol{R}^+\}$以$\{P(t;x,\mathrm{d}y)\}$为转移概率族，且还具有以下性质：

1） ξ 沿几乎所有轨道右连续；

2） ξ 是 Feller 过程；

则

1） $\{\xi_t,\mathscr{F}_{t+};t\in\boldsymbol{R}^+\}$是马氏过程；

2） $\{\xi_t,\mathscr{F}_{t+};t\in\boldsymbol{R}^+\}$是强马氏过程，即对$\forall$ 宽停时 $\tau,t>0$，及有界可测实函数 f，当 $\omega\in\{\omega;\tau(\omega)<+\infty\}$时有

$$E(f(\xi_{t+\tau})|\mathscr{F}_{\tau+})=\int P(t;\xi_\tau,\mathrm{d}y)f(y),$$

其中 $\mathscr{F}_{t+}=\bigcap\limits_{s>t}\mathscr{F}_s,\mathscr{F}_{\tau+}=(\mathscr{F}_{t+})_{t=\tau}$.

证明 事实上只要证明结论 2)就行了. 设 τ 是一个宽停时，令 $\tau_n=\frac{[2^n\tau]+1}{2^n}\downarrow\tau$，由于

$$\{\omega;\tau_n(\omega)\leqslant t\}=\left\{\omega;\tau<\frac{[2^n t]}{2^n}\right\}\in\mathscr{F}_{\frac{[2^n t]}{2^n}+}\subset\mathscr{F}_{t+},$$

可见 τ_n 是停时. 于是对于有界连续函数 f 及 $A\in\mathscr{F}_{\tau_n}$，我们有

$$E(f(\xi_{\tau_n+t})1_A(\omega))=E(P_t f(\xi_{\tau_n}(\omega))1_A(\omega)). \qquad (6.11)$$

又因为当 $n\to+\infty$ 时，$\tau_n\downarrow\tau$，$\xi_{\tau_n}\to\xi_\tau$（轨道右连续），则

$$f(\xi_{\tau_n})\to f(\xi_\tau),\ P_t f(\xi_{\tau_n}(\omega))\to P_t f(\xi_\tau(\omega))\ \text{(Feller 过程)}.$$

由有界收敛定理就得到对 $\forall\ A\in\mathscr{F}_{\tau-}\subset\mathscr{F}_{\tau_n}$，

$$E(f(\xi_{\tau+t})1_A(\omega))=E(P_t f(\xi_\tau)1_A) \qquad (6.12)$$

成立. 再利用在有界收敛意义下，连续函数可逼近有界可测函数，于是(6.12)就对一切有界可测函数成立. ▌

例 6.6（非强马氏的马氏过程） 设 $\{B_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$ 是 Brown 运动，又令

$$\xi_t=\begin{cases}B_t, & \text{当 } B_0\neq 0,\\ 0, & \text{当 } B_0=0\end{cases}\quad=B_t 1_{\{B_0\neq 0\}}(\omega)$$

与

$$P(t;x,B)=\begin{cases}\displaystyle\int_B\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}\mathrm{d}y, & \text{当 } x\neq 0;\\ 1_B(0), & \text{当 } x=0.\end{cases}$$

下面我们来验证 $\{\xi_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$ 是以 $\{P(t;x,B)\}$ 为转移函数族的马氏过程.

令 $\mathscr{F}_t=\sigma(B_u;u\leqslant t)$，显然 $\xi_t\in\mathscr{F}_t$；且对 $B\in\mathscr{B}_1$（实数的 Borel 集全体），$t,s>0$，

$$\begin{aligned}&E(1_B(\xi_{t+s})\,|\,\mathscr{F}_s)\\&\quad=E(1_B(B_{t+s})1_{\{B_0\neq 0\}}(\omega)\,|\,\mathscr{F}_s)+E(1_B(0)1_{\{B_0=0\}}\,|\,\mathscr{F}_s)\\&\quad=1_{\{B_0\neq 0\}}\int_B\frac{\mathrm{e}^{-\frac{(\xi_s-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{d}y+1_{\{B_0=0\}}1_B(0)\end{aligned}$$

$$= 1_{\{\xi_s \neq 0\}} \int_B \frac{e^{-\frac{(\xi_s - y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dy + 1_{\{\xi_s = 0\}} 1_B(\xi_s)$$

$$+ 1_{\{\omega, \xi_s = 0, B_0 \neq 0, B_s = 0\}}(\omega) \left[\int_B \frac{e^{-\frac{(\xi_s - y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dy - 1_B(0) \right]$$

$= P(t;\xi_s, B)$ (a.e.) (前式中最后一项几乎处处为 0).

由此可见 ξ 是马氏过程. 但是 ξ 不具有强马氏性. 假设不然，则若令 $\tau = \inf\{t > 0; \xi_t = 0\}$，

$$\begin{aligned} E_x(\xi_1 \neq 0, \tau \leqslant 1) &= E_x(E(\xi_1 \neq 0, \tau \leqslant 1 | \mathscr{F}_\tau)) \\ &\leqslant E_x[P(1 - \tau; \xi_\tau, \{0\}^c)] \\ &= E_x(P(1 - \tau; 0, \{0\}^c)) = 0. \end{aligned} \tag{6.13}$$

但是由于 $E_x(\xi_1 = 0) = 0 (x \neq 0)$，上式应为

$$\begin{aligned} &E_x(\xi_1 \neq 0, \tau \leqslant 1) \\ &\quad = E_x(\tau \leqslant 1) = E_x(\omega; \exists\, t \leqslant 1 \text{ 使 } B_t = 0) > 0. \end{aligned}$$

这与(6.13)矛盾，可见 ξ 不具强马氏性.

3. 过程的截止

设 $\xi = \{\xi_t, \mathscr{F}_t; t \in T\}$ 是一个强马氏过程，取值于$(\mathscr{S}, \Sigma)$. τ 是一个相对于$\{\mathscr{F}_t\}$ 的停时，而且满足$\{\omega; \tau(\omega) > s\} \in \sigma\{\xi_u; u \geqslant s\}$（事实上，一个尾时$\tau$(即满足：$\tau(\omega) = s + \tau(\theta_s\omega)$ 的停时）就满足上述条件). 令

$$\tilde{\mathscr{S}} \triangleq \mathscr{S} \cup \{\partial\}, \tilde{\Sigma} \triangleq \sigma(\Sigma, \{\partial\})$$

及

$$\eta_t(\omega) = \begin{cases} \xi_t(\omega), & \text{当 } t < \tau(\omega); \\ \partial, & \text{当 } t \geqslant \tau(\omega). \end{cases}$$

这样定义的意思是：将 ξ 在时刻 τ 以后"杀死"(其中"∂"是"死"状态）而得到新过程 $\eta = \{\eta_t; t \in T\}$. 显然，$\eta_t(\omega)$ 是$(\Omega, \mathscr{F}_t) \to (\tilde{\mathscr{S}}, \tilde{\Sigma})$ 的可测映射，因而 η 对$\{\mathscr{F}_t\}$ 仍然适应. 不仅如此，下面的命题还说明$\{\eta_t, \mathscr{F}_t; t \in T\}$ 仍然是马氏过程.

命题 6.9 $\{\eta_t,\mathscr{F}_t;t\in T\}$是马氏过程.

证明 对$\forall\ A\in\Sigma$,

$$
\begin{aligned}
P(\eta_{t+s}\in A|\mathscr{F}_s) &= P(\xi_{t+s}\in A,\tau>t+s|\mathscr{F}_s)\\
&= P(\xi_{t+s}\in A,\tau>t+s|\xi_s)1_{\{\eta_s\neq\partial\}}\\
&\quad(\text{由于}\{\tau>t+s\}\in\sigma\{\xi_u;u\geqslant t+s\})\\
&= P(\eta_{t+s}\in A|\eta_s)1_{\{\eta_s\neq\partial\}}.
\end{aligned}
$$

另一方面,我们有

$$
\begin{aligned}
P(\eta_{t+s}=\partial|\mathscr{F}_s) &= P(\tau\leqslant t+s|\mathscr{F}_s)\\
&= P(\tau\leqslant s|\mathscr{F}_s)+P(s<\tau\leqslant t+s|\mathscr{F}_s)\\
&= 1_{\{\tau\leqslant s\}}+P(s<\tau\leqslant t+s|\xi_s)\\
&\quad(\text{由于}\{s<\tau\leqslant t+s\}\in\sigma(\xi_u;u\geqslant s))\\
&= 1_{\{\eta_s=\partial\}}+P(s<\tau\leqslant t+s|\eta_s)1_{\{\eta_s\neq\partial\}}\\
&= 1_{\{\eta_s=\partial\}}+P(\eta_{t+s}=\partial|\eta_s)1_{\{\eta_s\neq\partial\}}\\
&= P(\eta_{t+s}=\partial|\eta_s).
\end{aligned}
$$

可见$\{\eta_t;t\geqslant 0\}$是马氏过程. ▌

推论 1 设$\{B_t;t\in\boldsymbol{R}^1\}$是一个 Brown 运动,$B_0=x>0$,$\mathscr{F}_t=\sigma(B_u,u\leqslant t)$. 将 B 按命题 6.9 在它到达 0 后截止,而得到一个马氏过程$\bar{Y}\triangleq\{Y_t;t\in\boldsymbol{R}^1\}$,$\bar{Y}$具有转移密度

$$
p(t;x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left\{\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}-\mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{2t}}\right\}.
$$

证明 由命题 6.9,$\bar{Y}$是马氏过程,而且对任意一个$(0,+\infty)$的 Borel 子集 A,我们有

$$
\begin{aligned}
&P(Y_{t+s}\in A|Y_s=x)\\
&\quad= P(B_{t+s}\in A;\tau>t+s|B_s=x)\\
&\quad= P(B_{t+s}\in A|B_s=x)-P(B_{t+s}\in A,\tau\leqslant t+s|B_s=x)\\
&\quad= \int_A\frac{\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{d}y-P(B_{t+s}\in A,\tau\leqslant t+s|B_s=x),
\end{aligned}
$$

其中 $x\in(0,+\infty)$. 按§5.3 中反射原理(定理 5.17),我们可以有

$$P(B_{t+s}>y,\tau\leqslant t+s\,|\,B_s=x)$$

$$=P(\widetilde{B}_{t+s}<x-y,(\widetilde{B})^*_{t+s}\geqslant x\,|\,\widetilde{B}_s=0)$$

$$=P(\widetilde{B}_t\geqslant 2x-(x-y)\,|\,\widetilde{B}_0=0)$$

$$=P(\widetilde{B}_t\geqslant x+y\,|\,\widetilde{B}_0=0)$$

$$=\int_{x+y}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}}\mathrm{d}y=\int_{y}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(z+x)^2}{2t}}\mathrm{d}z,$$

其中$\widetilde{B}_t=x-B_t,(\widetilde{B})^*_t=\sup\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant t\\ r\text{为有理数}}}\widetilde{B}_r=\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}\widetilde{B}_s$,从而

$$P(Y_{t+s}\in A\,|\,Y_s=x)=\int_A\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2t}}-\mathrm{e}^{-\frac{(x+z)^2}{2t}}\right)\mathrm{d}z.$$

由此可见,$\{Y_t;t\geqslant 0\}$正是例 6.4 中所得到的过程. ▌

推论 2 若ξ的无穷小生成元及其定义域分别为$\mathscr{A}$与$\mathscr{D}(\mathscr{A})$,则将η限制在$\mathscr{S}$上仍具有马氏性(不过,这时$P(\eta_t\in\mathscr{S})=1$不再成立). 而且当

$$\frac{1}{t}P(\tau\leqslant t\,|\,\xi_0=x)\xrightarrow[\text{一致收敛}]{\text{对 }x}c(x)\quad(t\downarrow 0),\tag{6.14}$$

$$\frac{1}{t}P(\xi_t\in\mathscr{S},|\xi_t-\xi_0|>\epsilon\,|\,\xi_0=x)\xrightarrow[\text{一致收敛}]{\text{对 }x}0\quad(t\downarrow 0)\tag{6.15}$$

时,η的无穷小生成元$\mathscr{A}'$的定义域$\mathscr{D}(\mathscr{A}')$包括$\mathscr{D}(\mathscr{A})$中的一致连续函数,而且对这样的函数$f$,

$$\mathscr{A}'f=\mathscr{A}f-cf.$$

证明 设f一致连续,而且$f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$,则

$$\frac{1}{t}(E_xf(\eta_t)-f(x))=\frac{1}{t}(E_x(f(\xi_t)1_{\{\tau>t\}})-f(x))$$

$$=\frac{1}{t}(E_x(f(\xi_t)-f(x))-\frac{1}{t}(E_xf(\xi_t)1_{\{\tau\leqslant t\}}).$$

由于$f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$,上式中第一项一致收敛到$\mathscr{A}f$;剩下我们只要证明第二项一致收敛到$cf$就行了. 事实上

$$\left|\frac{1}{t}E_x(f(\xi_t)1_{\{\tau\leqslant t\}})-c(x)f(x)\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{t}E_x((f(\xi_t)-f(x))1_{\{\tau\leqslant t\}})\right|$$

$$+\ \|f\|\left|P(\tau\leqslant t|\xi_0=x)\frac{1}{t}-c(x)\right|,$$

由(6.14),上式第二项当 $t\downarrow 0$ 一致收敛到 0,而其中第一项

$$\left|\frac{1}{t}E_x((f(\xi_t)-f(x))1_{\{\tau\leqslant t\}})\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{t}E_x(|f(\xi_t)-f(x)|1_{\{\tau\leqslant t\}\cap\{|\xi_\tau-x|\geqslant\delta\}})$$

$$+\ \frac{1}{t}E_x(|f(\xi_t)-f(x)|1_{\{\tau\leqslant t\}\cap\{|\xi_\tau-x|<\delta\}})$$

$$\triangleq \mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

由于 f 一致连续,任给 $\varepsilon>0$,$\exists\ \delta>$,使得当 $|x-y|<\delta$ 时 $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$,于是

$$\mathrm{II}\ \leqslant\varepsilon\frac{1}{t}E_x(1_{\{\tau\leqslant t\}}|\xi_0=0)\xrightarrow[\text{收敛}]{\text{一致}}\varepsilon c(x)\leqslant\varepsilon\|c\|;$$

然而,当 $t\downarrow 0$ 时用(6.15)得

$$\mathrm{I}\ \leqslant 2\|f\|\frac{1}{t}P(|\xi_t-x|\geqslant\delta|\xi_0=x)\xrightarrow[\text{收敛}]{\text{一致}}0,$$

由于 ε 是任意的,所以

$$\left\|\frac{1}{t}E_xf(\xi_t)1_{\{\tau\leqslant t\}}-cf\right\|\to 0.\ \blacksquare$$

4. Feymann-Kac 公式

下面我们来考察 $\mathscr{A}+c(x)$ 生成的半群与 $\mathscr{A}$ 生成的半群的关系,并进而明确 $c(x)$ 的概率意义.

引理 6.11 设 $\xi=\{\xi_t,\mathscr{F}_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$ 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上定义,取值于度量空间$(\mathscr{S},\Sigma)$的轨道右连续马氏过程,其生成元与弱生成元分别为 $\mathscr{A}$ 与 $\widetilde{\mathscr{A}}$,它们的定义域为 $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ 与 $\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}})$.

对任意有界可测函数 f,令

$$S_t f(x) = E_x(\mathrm{e}^{\int_0^t c(\xi_s)\mathrm{d}s} f(\xi_t)) \quad (c(x) \text{ 有界可测,})$$

$$T_t f(x) = E_x f(\xi_t),$$

则$\{S_t\}$是半群,而且有

$$1^\circ \quad S_t f(x) = T_t f(x) + \int_0^t T_{t-u}(cS_u f)(x)\mathrm{d}u, \tag{6.16}$$

$$S_t f(x) = T_t f(x) + \int_0^t S_u(cT_{t-u} f)(x)\mathrm{d}u, \tag{6.16$'$}$$

从而 S_t 与 T_t 有相同的强连续中心与弱连续中心.

2° 若 $c(x)$ 有界连续,那末 $f \in \mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}}^{(c)})$ 当且仅当 $f \in \mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}})$,其中$\widetilde{\mathscr{A}}^{(c)}$是半群 S_t 的弱生成元. 在条件成立时还有

$$\widetilde{\mathscr{A}}^{(c)} f = (\widetilde{\mathscr{A}} + c(x))f. \tag{6.17}$$

3° 若 ξ_t 的转移函数满足一致 $o(1)$ 条件,即

$$\psi_\varepsilon(h) \triangleq \sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant h \\ x\in\mathscr{X}}} P_x(|\xi_t - x| \geqslant \varepsilon) \to 0 \ (h \downarrow 0), \tag{6.18}$$

而且 $c(x)$ 有界一致连续,那末 $f \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{(c)})$ 当且仅当 $f \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$,其中$\mathscr{A}^{(c)}$是 S_t 的生成元. 同时

$$\mathscr{A}^{(c)} f = (\mathscr{A} + c(x))f. \tag{6.17}$$

证明 利用马氏性,我们有

$$\begin{aligned}
S_{t+u}f(x) &= E_x(\mathrm{e}^{\int_0^{t+u} c(\xi_v)\mathrm{d}v} f(\xi_{t+u})) \\
&= E_x(\mathrm{e}^{\int_0^u c(\xi_v)\mathrm{d}v} E_x(\mathrm{e}^{\int_u^{t+u} c(\xi_v)\mathrm{d}v} f(\xi_{t+u}) | \mathscr{F}_u)) \\
&= E_x(\mathrm{e}^{\int_0^u c(\xi_v)\mathrm{d}v} E_{\xi_u}(\mathrm{e}^{\int_0^t c(\xi_v)\mathrm{d}v} f(\xi_t))) \\
&= E_x(\mathrm{e}^{\int_0^u c(\xi_v)\mathrm{d}v} S_t f(\xi_u)) = S_u(S_t f)(x).
\end{aligned}$$

1° (6.16)的证明:由定义、Fubini 定理及马氏性

$$\begin{aligned}
&S_t f(x) - T_t f(x) \\
&\quad = E_x[f(\xi_t)(\mathrm{e}^{\int_0^t c(\xi_s)\mathrm{d}s} - 1)]
\end{aligned}$$

$$= E_x\left[f(\xi_t)\int_0^t e^{\int_{t-u}^t c(\xi_s)ds} c(\xi_{t-u})du\right]$$

$$= \int_0^t E_x(f(\xi_t)c(\xi_{t-u})e^{\int_{t-u}^t c(\xi_s)ds})du$$

$$= \int_0^t E_x(c(\xi_{t-u})E_x(e^{\int_{t-u}^t c(\xi_s)ds} f(\xi_t) \mid \mathscr{F}_{t-u}))du$$

$$= \int_0^t E_x(c(\xi_{t-u})E_{\xi_{t-u}}(e^{\int_0^u c(\xi_s)ds} f(\xi_u)))du$$

$$= \int_0^t T_{t-u}(cS_u f)(x)du.$$

这就证明了(6.16).类似地可证(6.16)′.

再则,我们注意对于 $\|T_t f - f\| \to 0$,有

$$\| f - S_t f \| \to 0 \quad (t \downarrow 0).$$

这是因为:由 S_t 的定义显见 $\| S_t \| \leqslant e^{\|c\|t}$,从而由(6.16)

$$\| S_t f - f \| \leqslant \| S_t f - T_t f \| + \| T_t f - f \|$$

$$\leqslant \int_0^t \| c \| e^{\|c\|u} du \| f \| + \| T_t f - f \| \to 0 \quad (t \downarrow 0).$$

这就说明了 S_t 与 T_t 有相同的强连续中心.同样地由

$$|S_t f(x) - f(x)| \leqslant \| S_t f - T_t f \| + |T_t f(x) - f(x)|$$

得到 S_t 与 T_t 有相同的弱连续中心.

2° 对于 $f \in \mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}})$,

$$\frac{S_t f(x) - f(x)}{t} = \frac{S_t f(x) - T_t f(x)}{t} + \frac{T_t f(x) - f(x)}{t}$$

$$= \left(\frac{S_t f(x) - T_t f(x)}{t} - c(x)f(x)\right)$$

$$+ \frac{T_t f(x) - f(x)}{t} + c(x)f(x).$$

利用(6.16),我们有

$$\frac{1}{t}(S_t f(x) - T_t f(x)) - c(x)f(x)$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t T_{t-u}(c(S_u f - T_u f))(x)du$$

$$+\frac{1}{t}\int_0^t (T_{t-u}(cT_uf)(x)-T_{t-u}(cf)(x))\mathrm{d}u$$

$$+\frac{1}{t}\int_0^t (T_{t-u}(cf)(x)-c(x)f(x))\mathrm{d}u$$

$$\triangleq I_1+I_2+I_3.$$

再用一次(6.16)我们得到

$$|I_1|=\left|\frac{1}{t}\int_0^t T_{t-u}\left(c\int_0^u T_{u-v}(cS_vf)(\cdot)\mathrm{d}v\right)(x)\mathrm{d}u\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{t}\int_0^t \|c\|\left\|\int_0^u T_{u-v}(cS_vf)(\cdot)\mathrm{d}v\right\|\mathrm{d}u$$

$$\leqslant\frac{1}{t}\int_0^t \|c\|\int_0^u\|cS_vf\|\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

$$\leqslant\frac{\|c\|^2}{t}\int_0^t\int_0^u \mathrm{e}^{\|c\|v}\|f\|\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

$$\leqslant\frac{\|c\|^2\|f\|}{t}\int_0^t\int_0^u\mathrm{d}v\mathrm{d}u\,\mathrm{e}^{\|c\|t}\to 0\ \ (t\to 0).$$

对于 I_2，我们有

$$|I_2|=\left|\frac{1}{t}\int_0^t T_{t-u}\left[c\int_0^u T_v\widetilde{\mathscr{A}}f(\cdot)\mathrm{d}v\right](x)\mathrm{d}u\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{t}\int_0^t\|c\|\left\|\int_0^u T_v\widetilde{\mathscr{A}}f(\cdot)\mathrm{d}v\right\|\mathrm{d}u$$

$$\leqslant\frac{\|c\|}{t}\int_0^t\int_0^u\|\widetilde{\mathscr{A}}f\|\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u\to 0\ \ (t\to 0).$$

另一方面，

$$I_3=\frac{1}{t}\int_0^t E_x(c(\xi_v)f(\xi_v)-c(x)f(x))\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{t}\int_0^t E_x([(c(\xi_v)-c(x))f(\xi_v)]$$

$$+c(x)[f(\xi_v)-f(x)])\mathrm{d}v$$

$$\triangleq I_4+I_5.$$

而且我们有

$$|I_5| = \left|\frac{c(x)}{t}\int_0^t (T_v f(x) - f(x))\mathrm{d}v\right|$$
$$= \left|\frac{c(x)}{t}\int_0^t\int_0^v T_s \widetilde{\mathscr{A}} f(x)\mathrm{d}s\mathrm{d}v\right|$$
$$\leqslant \frac{\|c\| \, \|\widetilde{\mathscr{A}} f\|}{t}\int_0^t\int_0^v \mathrm{d}s\mathrm{d}v \to 0.$$

最后，由 $c(x)$ 的连续性及 ξ_t 轨道右连续性（蕴含 $P_x(|\xi_v - x| \geqslant \varepsilon) \to 0 (v \to 0)$）

$$|I_4| \leqslant \frac{\|f\|}{t}\int_0^t E_x|c(\xi_v) - c(x)|\mathrm{d}v$$
$$= \frac{\|f\|}{t}\int_0^t E_x|(c(\xi_v) - c(x)|(I_{\{|\xi_v - x| \geqslant \varepsilon\}} + I_{\{|\xi_v - x| < \varepsilon\}})\mathrm{d}v$$
$$\leqslant \frac{2\|f\| \, \|c\|}{t}\int_0^t P_x(|\xi_v - x| \geqslant \varepsilon)\mathrm{d}v + o(1) \to 0 \quad (t \to 0).$$

这样，我们就证明了：对固定的 x，当 $t \to 0$ 时，

$$\frac{S_t f(x) - f(x)}{t} \to c(x)f(x) + \widetilde{\mathscr{A}} f(x),$$

并且，下述量

$$\left|\frac{S_t f(x) - f(x)}{t}\right| \leqslant \left|\frac{S_t f(x) - T_t f(x)}{t}\right| + \left|\frac{T_t f(x) - f(x)}{t}\right|$$

在 $t \leqslant 1$ 时有界. 从而得到

$$f \in \mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}}^{(c)}) \text{ 且 } \widetilde{\mathscr{A}}^{(c)} f = \widetilde{\mathscr{A}} f + c(x) f.$$

即 $\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}}^{(c)}) \subset \mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}})$，由对称的理由立得 2°.

3°的证明：对 $f \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$，我们估计

$$\left\|\frac{S_t f - f}{t} - \left(cf + \frac{T_t f - f}{t}\right)\right\| = \left\|\frac{S_t f - T_t f}{t} - cf\right\|.$$

从 2°的证明中可以看出，$I_1, I_2, I_3, I_5 \to 0 (t \to \infty)$ 关于 x 是一致的，此外在现在的条件下，2°的 I_4 的估计可改为

$$|I_4| \leqslant \frac{\|f\|}{t}\int_0^t [E_x((c(\xi_v) - c(x))I_{\{|\xi_v - x| < \varepsilon\}})$$

$$+ 2\|c\| \sup_{\substack{x \\ 0\leqslant v\leqslant t}} P_x(|\xi_v - x| \geqslant \varepsilon)\Big]\mathrm{d}v.$$

由 $c(x)$ 的一致连续性，上式右方第一项当 $t\to 0$ 时趋于 0 是对 x 一致的. 又由于 ξ_t 满足一致 $o(1)$ 条件，所以第二项趋于零 $(t\to 0)$ 也是对 x 一致的. 这就说明了

$$\left\|\frac{S_t f - T_t f}{t} - cf\right\| \to 0 \quad (t\to 0).$$

从而得到

$$f \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{(c)})$$

且 $\mathscr{A}^{(c)}_f = \mathscr{A}f + c(x)f$. ▌

注：如果只需证 3°，则可以很简单地直接证

$$\left\|\frac{S_t f - T_t f}{t} - cf\right\| \to 0.$$

定理 6.10（Feymann-Kac） 设 ξ_t 是为引理 6.11 所假定的取值于度量空间的轨道右连续马氏过程. 令

$$W(t,x) \triangleq S_t f(x) = E_x(\mathrm{e}^{\int_0^t c(\xi_s)\mathrm{d}s} f(\xi_t)), \qquad (6.19)$$

则有

1° 若 $c(x)$ 有界连续且 $f\in\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}})$，则 $W(t,x)$ 满足

$$\frac{\partial^+ W(t,x)}{\partial t} = \widetilde{\mathscr{A}}W(t,x) + c(x)W(t,x) \qquad (6.20)$$

（左侧导数为右导数）. 同时又是下述问题的唯一解：

$$W(t,x) = f(x) + \int_0^t (\widetilde{\mathscr{A}} + c(x))W(s,x)\mathrm{d}s,$$

$$\exists\, K,\alpha \text{ 使 } |W(t,x)| \leqslant K\mathrm{e}^{\alpha t}. \qquad (6.20)'$$

2° 若 $c(x)$ 有界一致连续且 ξ_t 的转移函数满足一致 $o(1)$ 条件，$f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$，则 $W(t,x)$ 是如下问题的唯一解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t} = \mathscr{A}W + c(x)W, \\ W(t,x) \to f(x) \quad (t\downarrow 0), \\ \exists\, \alpha,K \text{ 使得 } |W(t,x)| \leqslant K\mathrm{e}^{\alpha t}. \end{cases} \qquad (6.21)$$

证明 根据引理 6.11，由生成元与弱生成元的性质，对 1°，我们有

$$\frac{\partial^+ W}{\partial t}=\frac{\partial^+ S_t f}{\partial t}=(\widetilde{\mathscr{A}}+c(x))W \quad (这等价于积分形式).$$

对 2°，我们有

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial S_t f}{\partial t}=(\mathscr{A}+c(x))W.$$

而且在两种情形下都有

$$\lim_{t\to 0} W(t,x)=\lim_{t\to 0} S_t f(x)=f(x).$$

下面证明在 1°的情形下的唯一性(2°情形是其特例).

设方程有另一解 $W'(t,x)$，满足 $|W'(t,x)|\leqslant K'e^{\alpha' t}$. 那末对于

$$u(t,x)\triangleq W(t,x)-W'(t,x)$$

有

$$u(t,x)\to 0 \quad (t\to 0),$$

于是对 $\widetilde{K}\triangleq K\vee K'$，$\beta\triangleq\alpha\vee\alpha'$ 有

$$u(t,x)=\int_0^t \widetilde{\mathscr{A}}^{(c)}u(s,x)\mathrm{d}s,\quad |u(t,x)|\leqslant \widetilde{K}e^{\beta t}.$$

对积分$\int_0^t e^{-\lambda s}\widetilde{\mathscr{A}}^{(c)}u(s,x)\mathrm{d}s$ 用分部积分，我们得到

$$e^{-\lambda t}u(t,x)=-\int_0^t(\lambda-\widetilde{\mathscr{A}}^{(c)})(e^{-\lambda s}u(s,x))\mathrm{d}s.$$

两边用弱预解算子$\widetilde{R}_\lambda^{(c)}$：

$$\widetilde{R}_\lambda^{(c)}f(x)\triangleq\int_0^\infty e^{-\lambda t}S_t f(x)\mathrm{d}t$$

作用，再应用$\widetilde{R}_\lambda^{(c)}$ 与积分的可交换性以及在 $\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}}^{(c)})$上有

$$\widetilde{R}_\lambda^{(c)}(\lambda I-\widetilde{\mathscr{A}}^{(c)})=(\lambda I-\widetilde{\mathscr{A}}^{(c)})\widetilde{R}_\lambda^{(c)}$$

的性质，我们推出

$$e^{-\lambda t}\widetilde{R}_\lambda^{(c)}u(t,x)=\int_0^t e^{-\lambda s}u(s,x)\mathrm{d}s.$$

再利用 $\|\tilde{R}_\lambda^{(c)}1\|\leqslant\frac{1}{\lambda-\|C\|}$ 便得

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\infty}e^{-\lambda s}u(s,x)ds\right| &= \lim_{t\to\infty}|e^{-\lambda t}\tilde{R}_\lambda^{(c)}u(t,x)| \\ &\leqslant \lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t}\tilde{K}e^{\beta t}\|\tilde{R}_\lambda^{(c)}\| \\ &\leqslant \lim_{t\to\infty}\tilde{K}e^{-\lambda t}e^{\beta t}\frac{1}{\lambda-\|C\|}=0 \quad (\text{取 } \lambda>\beta\vee\|C\|).\end{aligned}$$

最后应用 Laplace 变换的唯一性就得到 $u(t,x)\equiv 0$. ▌

推论 若 $f(x)$ 有界一致连续,且存在有界一致连续的二阶偏导数,$x\in\boldsymbol{R}^d$,则对于一致连续的有界函数 $c(x)$,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t}=\dfrac{1}{2}\triangle W+c(x)W,\\ W(0,x)=f(x),\\ \exists\ \alpha,K,\text{使 } |W(t,x)|\leqslant Ke^{\alpha t}\end{cases}$$

存在唯一解:

$$W(t,x)=E_x(f(B_t)e^{\int_0^t c(B_s)ds}),$$

此处 B_t 是 d 维 Brown 运动.

证明 对于 B_t 我们有

$$\begin{aligned}\psi_\varepsilon(h) &= \sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant h\\ x\in\boldsymbol{R}^d}}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^d e^{-\frac{|y-x|^2}{2t}}dy \\ &\leqslant \int_{|y|\geqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{h}}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d e^{-\frac{|y|^2}{2}}dy \\ &\leqslant \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{h}}\right)^4}\int\frac{|y|^4}{(2\pi)^{d/2}}e^{-\frac{|y|^2}{2}}dy \\ &\leqslant \frac{5dh^2}{\varepsilon^4}\to 0 \quad (h\to 0).\end{aligned}$$

同时,在所设条件下有 $f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$,其中 $\mathscr{A}$ 为 B_t 的生成元.

注 1:如果定理 6.10 中的 $W(t,x)=S_tf(x)$ 对 t 连续而且 $\tilde{\mathscr{A}}W(t,x)$ 也对

t 连续，那末(6.20)中的 $\frac{\partial^+ W}{\partial t}$ 可改为 $\frac{\partial W}{\partial t}$（这可以作为一个数学分析的练习）.
作为特例是下述情形：

设 $\{\xi_t, t\in \boldsymbol{R}^+\}$ 为取值于 $\boldsymbol{R}^d$ 的轨道连续时齐马氏过程，对

$$Lf(x) \triangleq \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

如果有 $C_0^2 \subset \mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}})$，且对 $f\in C_0^2$ 有 $\widetilde{\mathscr{A}} f = Lf$，则称 ξ_t 为 Stroock-Varadhan 意义下的 L-扩散过程，其中 $(a_{ij}(x))(b_i(x))(i,j=1,\cdots,d)$ 是满足一定条件的函数. 由轨道连续性，只要 $g(x)$ 有界连续就有 $S_t g(x)$ 对 t 连续. 如果 $a_{ij}(x), b_i(x)$ 都是连续函数，那末对于 $f\in C_0^2, S_t f(x), \widetilde{\mathscr{A}} S_t f(x) (=S_t Lf(x))$ 都对 t 连续，于是由 2°及定理 6.10，$W(t,x)=S_t f(x)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = LW + c(x)W \quad (c(x)\text{ 是给定的有界连续函数}), \\ W(0,x) = f(x) \quad (f\in C_0^2). \end{cases}$$

再由定理 6.10 中 1°的部分中积分方程解的唯一性，可知这个 $W=S_t f(x)$ 是上述方程在满足条件：

$$\exists\ K,\alpha, \text{使 } |W(t,x)| \leqslant K e^{\alpha t}$$

下的唯一解.

以上的讨论在于把抽象的 $\mathscr{A}$ 或 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 归结为具体的微分算子. $W=S_t f$ 称为初值为 $f(x)$ 的对应的方程的解的概率表示.

注 2：转移函数的一致 $o(1)$ 条件满足的过程很多，例如 Poisson 过程，Cauchy 过程，都很容易直接验证满足一致 $o(1)$ 条件. 特别在 Poisson 过程情形，

$$\mathscr{D}(\mathscr{A}) = M(\boldsymbol{Z}^+) \triangleq \{(f_0, f_1, \cdots); f_0, f_1, \cdots \text{ 一致有界}\}$$

（即有界数列全体）. 于是由定理 6.10 得到：对有界数列 $c(i)$ 及参数为 λ 的 Poisson 过程 ξ_t，对 $i\geqslant 0$，及有界数列 $f(i)$，下述定义的函数列

$$W(t,i) \doteq E_i(e^{-\int_0^t c(\xi_s)ds} f(\xi_t))$$

是

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} W(t,0) \\ W(t,1) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(0)-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & c(1)-\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t,0) \\ W(t,1) \\ \vdots \end{pmatrix}, \\ W(0,i) = f(i), \exists\ K,\alpha \text{ 使 } |W(t,i)| \leqslant K e^{\alpha t} \end{cases}$$

的唯一解.

对于 Cauchy 过程也有类似结果.

§3 度量空间中测度的弱收敛及马氏过程在 C 空间与 D 空间的实现

正如在第一章中指出的按 Kolmogrov 定理构造的随机过程,有一个重大缺陷,那就是对于圆柱集所生成的 σ-代数来说,$\Omega=\mathscr{S}^T$ 太大了,以致像 $\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\xi_t$ 这样的量都不可测. 因此,当 $\mathscr{S}$ 是度量空间时,我们希望尽量将 $\Omega=\mathscr{S}^T$ 缩小,例如将 Ω 缩小为 $C(T\to\mathscr{S})\triangleq\{\omega\in\mathscr{S}^T;\omega$ 是 T 上的连续函数$\}$或 $D(T\to\mathscr{S})\triangleq\{\omega\in\mathscr{S}^T;\omega$ 是 T 上的右连续具有左极限的函数$\}$. 可惜的是,这并不是永远能实现的. 本节中,我们将给出在什么情形下可以这样做. 为此,我们先引入度量空间上测度的弱收敛的概念及理论作为工具. 应该指出它们不仅对解决本节所提出的马氏过程轨道性质具有重要意义,而且本身具有独立的理论价值. 它们是测度论由经典转向现代化的里程碑.

1. 度量空间上的测度空间

设 X 是一个完备可分度量空间,以 ρ 为距离,$\mathscr{B}\triangleq\mathscr{B}(X)$是由 X 中全体开集所生成的 σ-代数. 这里可分性保证了 $\mathscr{B}$ 可以是由 X 中的可列个开球所生成的 σ-代数. 又设 μ 是$(X,\mathscr{B})$上的一个测度,那么容易证明它一定是正则的,即

$$\mu(A)=\inf_{G\supset A}\mu(G)=\sup_{C\subset A}\mu(C).$$

上式中上下确界的范围分别取遍一切 A 的闭子集 C 与一切包含 A 的开集 G.

令 $\Lambda(f)=\int f\mathrm{d}\mu$(其中 f 是 X 上的有界连续函数). 于是两个 X 上的测度 $\mu_1=\mu_2$,当且仅当对应的 Λ_1 与 Λ_2 对一切有界连续函

数 f 都有 $\Lambda_1(f)=\Lambda_2(f)$. 事实上,为了唯一决定 μ,$\Lambda(\cdot)$ 的考虑范围还可缩小,例如 $\Lambda_1(f)=\Lambda_2(f)$ 对任何一致连续的有界连续函数成立就可保证 $\mu_1=\mu_2$.

令 $\mathscr{P}(X)=\{\mu;\mu$ 是 $(X,\mathscr{B}(X))$ 上的概率测度$\}$,于是 $\forall\ \mu\in\mathscr{P}(X)$ 就有 $\Lambda(f)=\int f\mu(\mathrm{d}x)$ 与之对应,而且 $\mu_1=\mu_2$,当且仅当 $\Lambda_1\equiv\Lambda_2$.

在 $\mathscr{P}(X)$ 上可以定义各种收敛性,以使我们在构造某个测度 μ 时,先构造出近似地满足要求的 μ_n. 再考查,当 $n\to+\infty$ 时 μ_n 是否有一个极限测度 μ,它正好满足我们的要求.

$\mathscr{P}(X)$ 上可以定义三种不同的收敛性:

定义 6.2 1) 一致收敛 设 $\mu_n\in\mathscr{P}(X)$,称 μ_n 一致收敛到 $\mu\in\mathscr{P}(X)$,如果

$$\sup_{A\in\mathscr{B}}|\mu_n(A)-\mu(A)|\to 0\quad(\text{当 } n\to+\infty).$$

这个条件等价于:对 $\forall\ f\in C(X)$

$$\sup_{|f|\leqslant 1}|\Lambda_n(f)-\Lambda(f)|=\sup_{|f|\leqslant 1}\left|\int f\mathrm{d}\mu_n-\int f\mathrm{d}\mu\right|\to 0\ (\text{当 } n\to+\infty).$$

由于我们的目的是要求由 μ_n 得到 μ,一般说来一致收敛这样的收敛性似乎太强了.

2) 强收敛 $\mu_n\in\mathscr{P}(X)$,称 μ_n 强收敛到 $\mu\in\mathscr{P}(X)$(记为 $\mu_n\xrightarrow{s}\mu$),如果对 $\forall\ A\in\mathscr{B}$,

$$\mu_n(A)\to\mu(A)\quad(\text{当 } n\to+\infty).$$

这个条件等价于:对 $\forall\ f\in\mathscr{B}(X)$(有界 Borel 函数族)

$$\Lambda_n(f)\to\Lambda(f)\quad(\text{当 } n\to+\infty).$$

这个收敛性还是比较强的.

3) 弱收敛 设 $\mu_n\in\mathscr{P}(X)$,称 μ_n 弱收敛到 μ(记为 $\mu_n\xrightarrow{d}\mu$),如果对 $\forall\ f\in C_b(X)$(全体有界连续函数),

$$\Lambda_n(f)\to\Lambda(f)\quad(\text{当 } n\to+\infty).$$

定义 6.3 A 称为测度 μ 的连续集,如果 A 的闭包集 $\bar{A}$ 与内

点集 A° 具有相同的测度，即 $\mu(\overline{A})=\mu(A^\circ)$.

定理 6.12 设 $\mu,\mu_n\in\mathscr{P}(X)$. 下列诸命题等价：

1) μ_n 弱收敛到 μ;

2) 对任何 X 上有界一致连续函数 f 有

$$\Lambda_n(f)\to\Lambda(f)\quad(n\to+\infty);$$

3) 对 $\forall$ 闭集 $C\subset X$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(C)\leqslant\mu(C);$$

4) 对 $\forall$ 开集 $G\subset X$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(G)\geqslant\mu(G);$$

5) 对 $\forall$ μ-连续集 A

$$\mu_n(A)\to\mu(A)\quad(n\to+\infty).$$

证明 1)$\Longrightarrow$2)是弱收敛的定义.

2)$\Longrightarrow$3). 设有闭集 $C\subset X$，令

$$f_m(x)=\frac{1}{1+m\rho(x,C)}\vee 1_c(x)\quad(\text{对}\ \forall\ x\in X).$$

显然 $f_m(x)$ 有界一致连续. 于是由有界收敛定理

$$\mu(C)=\lim_{m\to\infty}\int f_m(x)\mathrm{d}\mu=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int f_m(x)\mathrm{d}\mu_n\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(C).$$

3)$\Longleftrightarrow$4). 由取余集即得证.

3)或 4)$\Longrightarrow$5). 设 A 是连续集，则 $\mu(A)=\mu(\overline{A})=\mu(A^\circ)$. 于是

$$\mu(A)=\mu(A^\circ)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(A^\circ)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(A),$$

$$\mu(A)=\mu(\overline{A})\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(\overline{A})\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(A).$$

从而

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(A).$$

5)$\Longrightarrow$1). 这一步证明的思想是：对 $\forall\ f\in C_b(X)$，我们设法找出连续集上的阶梯函数 f_n 来一致逼近 f. 由于 μ 是概率测度，可以看出：使得 $\mu(\{x\in X;f(x)=a\})\geqslant\frac{1}{n}$ 的不同的 a 最多只有 n

个.因而满足$\mu(\{x\in X;f(x)=a\})>0$的a最多只有可列个.于是,对$\forall\ n>0$及$M>\|f\|$,$\exists\ a_1^{(n)},\cdots,a_{2n}^{(n)}\in\boldsymbol{R}^1$,使得

$$a_k^{(n)}\in\left(\left(\frac{k-1}{n}-1\right)M,\left(\frac{k}{n}-1\right)M\right)\ (k=1,2,\cdots,2n),$$

而且

$$\mu(\{x\in X;f(x)=a_k^{(n)}\})=0\quad(1\leqslant k\leqslant 2n).$$

这样就有

$$A_k^{(n)}\triangleq\{x\in X;a_{k-1}^{(n)}\leqslant f(x)<a_k^{(n)}\}$$

都是μ-连续集.对$\forall\ f\in C_b(X)$,令

$$f_n(x)\triangleq\sum_{k=1}^{2n}a_k^{(n)}1_{\{x\in X;a_{k-1}^{(n)}\leqslant f(x)<a_k^{(n)}\}}.$$

显然

$$\sup_x|f_n(x)-f(x)|\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant 2n}|a_k^{(n)}-a_{k-1}^{(n)}|<\frac{2M}{n}\to 0,$$

$$\int f_m(x)\mathrm{d}\mu_n=\sum_{k=1}^{2m}a_k^{(m)}\mu_n(A_k^{(m)})\xrightarrow[n\to\infty]{}\int f_m(x)\mathrm{d}\mu,$$

因此由$\int f_m(x)\mathrm{d}\mu_n\to\int f(x)\mathrm{d}\mu_n(m\to\infty)$关于$n$的一致性有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int f(x)\mathrm{d}\mu_n&=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int f_m(x)\mathrm{d}\mu_n=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int f_m(x)\mathrm{d}\mu_n\\&=\lim_{m\to\infty}\int f_m(x)\mathrm{d}\mu=\int f(x)\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

也就是μ_n弱收敛到μ. ▌

命题 6.13 在$\mathscr{P}(X)$上可以定义一个距离$\tilde{\rho}$使得$\mu_n\xrightarrow{d}\mu$当且仅当$\tilde{\rho}(\mu_n,\mu)\to 0(n\to\infty)$.

证明 由 Tychonoff 嵌入定理([K],125 页),任何一个可分度量空间X,都可以嵌入到(同胚于)单位区间的可列乘积空间(它是一个紧度量空间)中去作为其子空间.因此其闭包$\overline{X}$也是紧的,X上的一致连续函数均可唯一地开拓到$\overline{X}$上,成为$\overline{X}$上的一致连续函数,将全体这样的函数组成的空间记为$U(X)$,它就必定可

分. 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ 是它的可数稠子集，令

$$\tilde{\rho}(\mu_1,\mu_2) \triangleq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\left|\int f_j \mathrm{d}\mu_1 - \int f_j \mathrm{d}\mu_2\right|}{1+\left|\int f_j \mathrm{d}\mu_1 - \int f_j \mathrm{d}\mu_2\right|}.$$

显然，$\tilde{\rho}$ 是 $\mathscr{P}(X)$ 上的一个距离. 并且

$$\tilde{\rho}(\mu_n,\mu) \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

当且仅当对 $\forall\ j$，

$$\int f_j \mathrm{d}\mu_n \to \int f_j \mathrm{d}u \quad (n \to \infty). \blacksquare$$

事实上，在 $\mathscr{P}(X)$ 上还可定义另一个距离：

$$d(\mu_1,\mu_2) \triangleq \inf\{\delta;\mu_1(A) \leqslant \mu_2(A^\delta) + \delta,$$
$$\mu_2(A) \leqslant \mu_1(A^\delta) + \delta, \text{对一切闭集 } A \text{ 成立}\},$$

其中 $A^\delta \triangleq \{x \in X; \rho(x,A) \leqslant \delta\}$. $d(\cdot,\cdot)$ 称为 $\mathscr{P}(X)$ 上的 Levy-Prohorov 距离，它和 $\tilde{\rho}(\cdot,\cdot)$ 是等价的.

2. 胎紧与 $\mathscr{P}(X)$ 的紧性

定理 6.14 设 X 是一个紧度量空间，则 $\mathscr{P}(X)$ 在弱收敛意义下是列紧的.

证明 由于 X 是紧度量空间，$C_b(X)$ 是可分的. 又设 $\{f_1,\cdots,f_n,\cdots\} \subset C_b(X)$ 是 $C_b(X)$ 的可数稠集. 对 $\forall\ f_n$ 及 $\mu_j \in \mathscr{P}(X)$ $(n=1,2,\cdots; j=1,2,\cdots)$，

$$|\Lambda_j(f_n)| = \left|\int f_n \mathrm{d}\mu_j\right| \leqslant \|f_n\| = \sup_{x\in X}|f_n(x)|,$$

由抽对角线子列方法，$\exists\ \{\mu_{j_r}\}$，使得

$$\lim_{r\to+\infty}\int f_n \mathrm{d}\mu_{j_r} \text{ 对 } \forall\ n = 1,2,\cdots \text{ 存在.}$$

又由于对 $\forall\ f \in C_b(X)$，$\exists\ n_k$ 使当 $k \to \infty$，$f_{n_k} \to f$ 即

$$\sup_x |f_{n_k}(x) - f(x)| \to 0,$$

于是

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu_{j_r}-\int f\mathrm{d}\mu_{j_s}\right|\leqslant\left|\int(f-f_{n_k})\mathrm{d}\mu_{j_r}\right|+\left|\int(f-f_{n_k})\mathrm{d}\mu_{j_s}\right|$$
$$+\left|\int f_{n_k}\mathrm{d}\mu_{j_r}-\int f_{n_k}\mathrm{d}\mu_{j_s}\right|.$$

对$\forall\ \varepsilon>0$,∃ n_k 使 $\|f-f_{n_k}\|<\frac{\varepsilon}{4}$,于是

$$\left|\int(f-f_{n_k})\mathrm{d}\mu_{j_r}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4};\quad\left|\int(f-f_{n_k})\mathrm{d}\mu_{j_s}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}.$$

此外,对固定的 n_k,∃ N 使当 $r,s>N$ 时,

$$\left|\int f_{n_k}\mathrm{d}\mu_{j_r}-\int f_{n_k}\mathrm{d}\mu_{j_s}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $r,s>N$ 时,

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu_{j_r}-\int f\mathrm{d}\mu_{j_s}\right|<\varepsilon,$$

即存在

$$\Lambda(f)\triangleq\lim_{r\to\infty}\int f\mathrm{d}\mu_{j_r}\quad(\forall\ f\in C_b(X)).$$

显然 $\Lambda(f)$是 $C_b(X)$上的有界线性泛函,由 Rieze 表现定理[Yo],存在有限测度 μ,使

$$\Lambda(f)=\int f\mathrm{d}\mu.$$

显然

$$\mu(X)=\Lambda(1)=\lim_{n\to\infty}\int 1\mathrm{d}\mu_n=1,$$

于是

$$\mu\in\mathscr{P}(X),\ \text{而且}\ \mu_{j_r}\xrightarrow{d}\mu.\ \blacksquare$$

定义 6.4(胎紧,Tight) $\{\mu_t$ 是 X 上的概率测度;$t\in T\}$称为胎紧的,如果对$\forall\ \varepsilon>0$,存在 X 的紧子集 K_ε 使得对$\forall\ t\in T$,

$$\mu_t(X-K_\varepsilon)<\varepsilon.$$

由定义可见,胎紧即指空间 X 可以有一致的 ε 近似紧内胎.

定理 6.15(Prohorov) 设 X 是一个可分度量空间,$\{\mu_n\in\mathscr{P}(X),n\geqslant1\}$是胎紧的,则$\{\mu_n\}$有弱收敛子列.

证明 由 Tychonoff 定理，X 同胚于紧度量空间$[0,1]^{Z^+}$的一个子集，因而可以找到一个新的等价度量，使在其下它的闭包 $\overline{X}$ 是紧的. 这样，把 μ_n 看作是 $\mathscr{P}(\overline{X})$中的概率测度，由定理 6.14 一定存在 $\mu\in\mathscr{P}(\overline{X})$与子列 n_k，使 $\mu_{n_k}\xrightarrow{d}\mu$.

下面只需证明 $\mu\in\mathscr{P}(X)$即 $\mu(\overline{X}-X)=0$，定理就得证. 为此，取 $0<\varepsilon_j\downarrow 0$. 由于$\{\mu_n\}$胎紧，则存在紧集 $K_j\uparrow$，使得 $\mu_n(K_j)>1-\varepsilon_j$. 由定理 6.12 有

$$1\geqslant\mu(X)\geqslant\lim_{j\to+\infty}\mu(K_j)\geqslant\lim_{j\to+\infty}\overline{\lim_{k\to+\infty}}\mu_{n_k}(K_j)\geqslant\lim_{j\to\infty}(1-\varepsilon_j)=1.$$

可见 $0\leqslant\mu(\overline{X}-X)\leqslant 1-\mu(X)=0$，即 $\mu\in\mathscr{P}(X)$. ▌

定理 6.16 设 X 是一个完备可分度量空间，令 $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(X)$ 是在弱拓扑下 $\mathscr{P}(X)$的紧子集. 则对$\forall\ \varepsilon>0$，存在 X 的紧子集 K_ε，使 $\mu(K_\varepsilon)\geqslant 1-\varepsilon$ 对$\forall\ \mu\in\mathscr{A}$ 成立.

证明 对$\forall\ \mu\in\mathscr{P}(X)$及 X 的开集 $G_n\uparrow X$，有 $\mu(X-G_n)\downarrow 0$. 此外，由于 $X\backslash G_n$ 是闭集，对$\forall\ \mu_m\xrightarrow{d}\mu$，及任一固定的 n

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\mu_m(X\backslash G_n)\leqslant\mu(X\backslash G_n).$$

另一方面，$\exists\ \mu_m\in\mathscr{A}$，使$\forall\ n$ 有

$$\sup_{\mu\in\mathscr{A}}\mu(X\backslash G_n)=\lim_m\mu_m(X\backslash G_n).$$

由于 $\mathscr{A}$ 是紧的，不妨设 $\mu_m\xrightarrow{d}\mu_0$，于是

$$\begin{aligned}\sup_{\mu\in\mathscr{A}}\mu(X\backslash G_n)&=\overline{\lim_{m\to+\infty}}\mu_m(X\backslash G_n)\\&\leqslant\mu_0(X\backslash G_n)\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}\tag{6.17}$$

又由于 X 可分，它应有可列开球覆盖：

$$X=\bigcup_{j=1}^{\infty}S(x_{j,r}2^{-r})\quad(\forall\ r=1,2,\cdots)$$

(其中 $S(x,R)$指中心为 x 半径为 R 的开球). 令

$$G(n,r)\triangleq\bigcup_{j=1}^{n}S(x_{j,r}2^{-r}),$$

则 $G(n,r)\uparrow X$(当 $n\to\infty$). 这样，由(6.17)式，对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists$

$N(\varepsilon,r)$，使得当 $n\geqslant N(\varepsilon,r)$ 时，

$$\mu(X\backslash G(n,r))<\frac{\varepsilon}{2^r}\quad(\text{对}\,\forall\ \mu\in\mathscr{A}).$$

于是，令

$$G_\varepsilon\triangleq\bigcap_{r=1}^{\infty}G(N(\varepsilon,r),r),\quad K_\varepsilon=\overline{G}_\varepsilon.$$

容易看出 K_ε 是完全有界集，而且

$$\begin{aligned}\mu(K_\varepsilon)&\geqslant 1-\mu(X\backslash G_\varepsilon)\geqslant 1-\sum_{r=1}^{\infty}\mu(X\backslash G(N,r))\\&\geqslant 1-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^r}=1-\varepsilon.\ \blacksquare\end{aligned}$$

3. 连续函数空间上的测度

本段以下，我们总简记 $C(\boldsymbol{R}^+\to\mathscr{S})$ 为 $C(\boldsymbol{R}^+)$，$C([0,1]\to\mathscr{S})$ 为 $C[0,1]$，$D([0,1]\to\mathscr{S})$ 为 $D[0,1]$，$D(\boldsymbol{R}^+\to\mathscr{S})$ 为 $D(\boldsymbol{R}^+)$ 等. 这样做是为了记号方便，简省篇幅，通过上下文，读者总能了解它们各自的意义而不会产生混淆.

设概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机过程 $\xi\triangleq\{\xi_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$ 有状态空间 $(\mathscr{S},\Sigma)$，那么它也可以看成是 $(\Omega,\mathscr{F})\to(\mathscr{S}^{\boldsymbol{R}^+},\Sigma^{\boldsymbol{R}^+})$ 的可测变换，这里我们假定 $\mathscr{S}$ 为完备度量空间，$\Sigma=\mathscr{B}(\mathscr{S})$ 为它的拓扑可测 σ- 代数，$\Sigma^{\boldsymbol{R}^+}$ 是 $\mathscr{S}^{\boldsymbol{R}^+}$ 的柱集生成的 σ- 代数. 这样由 P 在 $\Sigma^{\boldsymbol{R}^+}$ 上可导出一个测度：

$$\mu(A)=P(\xi^{-1}(A))\quad(A\in\Sigma^{\boldsymbol{R}^+}).$$

要求 ξ 沿几乎所有轨道连续，就是要求 μ 集中在 $C(\boldsymbol{R}^+)(\subset\mathscr{S}^{\boldsymbol{R}^+})$，其中

$$C(\boldsymbol{R}^+)=\{\omega;\omega:\boldsymbol{R}^+\to\mathscr{S}\text{ 的连续映射}\}.$$

对给定的转移函数族 $\{P(t;x,A)\}$，要构造轨道连续的马氏过程 ξ，只要构造在 $C(\boldsymbol{R}^+)$ 上的概率测度 μ，使得对 $\forall\ B\in\Sigma$，$x\in\mathscr{S}$，有

$$\mu(\omega:\omega_t \in B \mid \mathscr{F}_s, \omega_s = x) = P(t-s;x,B).$$

再令 $\xi_t(\omega)=\omega_t$，就是我们所要的马氏过程了. 通常，我们设 $\xi_0=x$ 而得到测度为 $\mu_x(\cdot)$. 一般地，要想得到已知 ξ_0 的分布(初分布)的马氏过程，只要把 μ_x 当作已知 $\xi_0=x$ 下的条件测度，再令

$$\mu(A) = \int_{\mathscr{S}} \mu_0(\mathrm{d}x)\mu_x(A)$$

即可(其中 $\mu_0(A)=P(\xi_0\in A)$).

要能构造 $C(\boldsymbol{R}^+)$ 上的概率测度，只要考虑 $T=[0,1]$ 时的概率测度构造即可(类似地构造 $C[0,n]$ 上测度 $P^{(n)}$ 使 $P^{(n+1)}|_{C[0,n]}=P^{(n)}$，由此可得到 $C(\boldsymbol{R}^+)$ 上测度 P 满足 $P|_{C[0,n]}=P^{(n)}$).

本节以下设 $\mathscr{S}$ 是一个可分 Banach 空间. 对 $x\in\mathscr{S}$，将 x 的模记为 $|x|$. 在 $C[0,1]\equiv\{f;f:[0,1]\to\mathscr{S}$ 的连续函数$\}$中引入距离：

$$\rho(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|.$$

(例如当 $\mathscr{S}=\boldsymbol{R}^1$，

$$C[0,1] = \{\omega;\omega \text{ 是定义在}[0,1]\text{ 上的实连续函数}\}.$$

在 $C[0,1]$ 中，收敛就是实函数在 $[0,1]$ 上一致收敛. 由 Arzela-Ascoli引理，$C[0,1]$的子集 X' 是紧集当且仅当 X' 中的函数等度连续一致有界.)

命题 6.17 对固定的 $t\in[0,1]$，$e_t(f)\triangleq f(t)$ $(\forall f\in C[0,1])$ 可看作 $C[0,1]\to\mathscr{S}$ 的映射. $e_t(\cdot)$ 是一个连续映射. 又令 $\mathscr{B}(C[0,1])$ 是由 $C[0,1]$ 中开集所生成的 σ-代数；$\mathscr{B}$ 是使全部上述映射 e_t 都可测的最小 σ-代数. 则 $\mathscr{B}=\mathscr{B}(C[0,1])$.

证明 由

$$|f(t)-g(t)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|,$$

e_t 显然是连续映射. 所以 e_t 对 $\mathscr{B}(C[0,1])$ 可测，因而 $\mathscr{B}\subset\mathscr{B}(C[0,1])$. 另一方面，由于 $C[0,1]$ 可分，$C[0,1]$ 的任一开子集都是可列个开球的并. 要证明 $\mathscr{B}(C[0,1])\subset\mathscr{B}$，只要证明 $C[0,1]$ 中的任一开球都在 $\mathscr{B}$ 中. 考虑一个开球

$$S(f_0,r) \triangleq \{f \in C[0,1]; \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - f_0(t)| < r\}.$$

又由于 $f(t)$ 对 t 的一致连续性，上式等于

$$\bigcup_{\substack{r' \text{有理} \\ r' < r}} \bigcap_{\substack{t \in [0,1] \\ \text{中的有理数}}} \{f \in C[0,1]; |f(t) - f_0(t)| < r'\} \in \mathscr{B}. \blacksquare$$

下面我们就利用弱收敛的工具，在 $C(\mathscr{S})$ 上定义测度，使得它符合已知的转移概率.

4. 马氏过程的连续函数空间上的实现

设已知转移函数族

$$\{P(t;x,A); t \in [0,1], x \in \mathscr{S}, A \in \Sigma\}.$$

令
$$B(x,\varepsilon)^c = \{y \in \mathscr{S}; |x - y| > \varepsilon\},$$

$$\psi_\varepsilon(\delta) = \sup_{\substack{x \in \mathscr{S} \\ t < \delta}} P(t;x,B(x,\varepsilon)^c).$$

定理 6.18 设转移函数族

$$\{P(t;x,A); t \in [0,1], x \in \mathscr{S} = \boldsymbol{R}^d, A \in \Sigma\}$$

满足 Dynkin-Kinney 条件（或称一致 $o(\delta)$ 条件）

$$\psi_\varepsilon(\delta) = o(\delta).$$

则可以构造 $(C[0,1], \mathscr{B}(C[0,1]))$ 上的概率测度 μ，使得

$$\mu(\omega \in C[0,1]; \omega_t \in A \mid \omega_u; u \leqslant s)$$
$$= P(t - s; \omega_s, A) \quad (\text{对} \ \forall\, t \geqslant s, A \in \Sigma \ \text{成立}).$$

又令 $\Omega = C[0,1]$，于是在 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 上可定义

$$\xi_t(\omega) = \omega_t \quad (\omega \in \Omega, t \in [0,1]).$$

则 $\xi \triangleq \{\xi_t(\omega); t \in [0,1]\}$ 是一个以 $\{P(t;x,A)\}$ 为转移函数的马氏过程.

注：定理中的 $C[0,1]$ 可改成 $C(\boldsymbol{R}^+)$.

为证明定理 6.18，我们先给出以下引理.

引理 6.19 设 $\{\xi_k; k = 0,1,\cdots,h\}$ 是马氏链，则

$$P_x(\max_{0 \leqslant k \leqslant h} |\xi_k - x| > \varepsilon)$$

$$\leqslant 2 \sup_{\substack{0 \leqslant r \leqslant s \leqslant h \\ x}} P\left\{ \omega; |\xi_r - \xi_s| > \frac{\varepsilon}{2} \middle| \xi_s = x \right\}.$$

证明 令 $\tau = \min\{k; |\xi_k - x| > \varepsilon\}$. 这时

$$P_x(\max_{0 \leqslant k \leqslant h} |\xi_k - x| \leqslant \varepsilon) = P_x(\tau > h),$$

由于 τ 只取有限个值,

$$P_x(\tau \leqslant h) = P_x\left(\tau \leqslant h; |\xi_h - x| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$+ P_x\left(\tau \leqslant h; |\xi_h - x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\leqslant \psi_{\frac{\varepsilon}{2}}(h) + P_x\left(|\xi_h - x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}; \tau \leqslant h\right)$$

(由于 $|\xi_\tau - x| > \varepsilon$, 可见

$$\left\{\omega; |\xi_h(\omega) - x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \left\{\omega; |\xi_h(\omega) - \xi_\tau(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\})$$

$$\leqslant \psi_{\frac{\varepsilon}{2}}(h) + E_x\left(|\xi_h - \xi_\tau| > \frac{\varepsilon}{2}; \tau \leqslant h\right)$$

$$\leqslant \psi_{\frac{\varepsilon}{2}}(h) + E_x\left(E_x\left(|\xi_{h-\tau} - \xi_\tau| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}; \tau \leqslant h \middle| \mathscr{F}_\tau\right)\right)$$

$$\leqslant \psi_{\frac{\varepsilon}{2}}(h) + E_x\left(E_y |\xi_{h-s} - y| > \frac{\varepsilon}{2}\right)_{\substack{s = \tau < h \\ y = \xi_\tau}}$$

$$\leqslant 2\psi_{\frac{\varepsilon}{2}}(h). \blacksquare$$

定理证明 1) 令

$$L^{(n)} = \{f; f \text{ 为}[0,1] \text{ 上的 } 2^n \text{ 等分点连续折线}\}.$$

先在 $L^{(n)}$ 上定义测度族 $\{\mu_x^{(n)}\}$ 使得

$$\mu_x^{(n)}(\omega_0 = x) = 1,$$

$$\mu_x^{(n)}(\omega; \omega_t \in A | \omega_u(u \leqslant s), \omega_s = y) = P(t - s, y, A)$$

对 $\forall\ s, t = 0, t_1, \cdots, t_{2^n}$ 成立, 其中 $t_k = \dfrac{k}{2^n}$.

$L^{(n)}$ 中 f 的一般形式是

$$f(t)=\sum_{k=1}^{2^n}(x_{k-1}+(t-t_k)(x_k-x_{k-1}))1_{[t_{k-1},t_k)}(t)+x_{2^n}1_{\{1\}}(t).$$

(6.18)

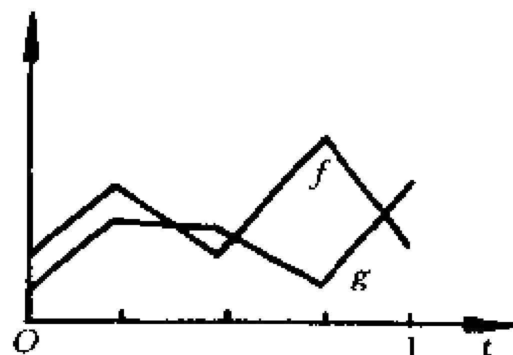
显然$L^{(n)}$作为$C[0,1]$的子集，$f,g\in L^{(n)}$的距离ρ满足

$$\rho(f,g)=\max_{0\leqslant k\leqslant 2^n}\left|f\left(\frac{k}{2^n}\right)-g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right|. \tag{6.19}$$

令T_n是如下映射：

$$T_n:\mathscr{R}^{2^n+1}\to C[0,1],$$

$$(x_0,x_1,\cdots,x_{2^n})\mapsto f(t)$$



（见(6.18)）. 由(6.19)可见，T_n是连续映射，因而T_n对$\mathscr{B}$可测. 进而，对$\forall A\in\mathscr{B}$，可以定义$(C[0,1],\mathscr{B})$上的测度

$$\mu_x^{(n)}(A)\triangleq\int\cdots\int_{T_n^{-1}(A)}P\left(\frac{1}{2^n};x,\mathrm{d}x_1\right)P\left(\frac{1}{2^n};x_1,\mathrm{d}x_2\right)$$

$$\times\cdots P\left(\frac{1}{2^n};x_{2^n-1},\mathrm{d}x_{2^n}\right).$$

由于$L^{(n)}$是T_n的值域，可见$\mu_x^{(n)}$测度集中于$L^{(n)}$上.

2）设以x为初值，$P(t;x,A)$为转移函数的马氏过程为$\eta_x(t)$，生成的测度为P_x，则$\mu_x^{(n)}$与P_x在所有形如$\frac{k}{2^n}$的二分点组成的集合上的有限维分布是一样的. 但是，由 Dynkin-Kinney 条件可知$\eta_x(t)$在$[0,1]$是随机连续的，因而也是一致随机连续的. 从而可得$\mu_x^{(n)}$的一切有限维分布都弱收敛于P_x的对应有限维分布.

3）证明$\{\mu_x^{(n)}\}$对弱收敛是紧的，也即要证明$\{\mu_x^{(n)}\}$作为$C[0,1]$的子集的测度是胎紧的.

由定理条件，取$\epsilon_i=2^{-i}$，对$\forall\ \delta>0$，可以找到$N(i,\delta)$，使得

$$\frac{\psi_{\frac{\epsilon_i}{4}}(2^{-N(i,\delta)})}{2^{-N(i,\delta)}}<\frac{\delta}{2^{i+1}}. \tag{6.20}$$

令

$$K_\delta^i = \{\omega \in C[0,1]; \omega_0 = x, \sup_{|t-s|\leqslant\delta} |\omega_t - \omega_s| \leqslant \varepsilon_i\},$$

$$K_\delta = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_\delta^i.$$

由于两端固定的折线比直线的最大 δ-区间振幅大，所以 $\mu_x^{(n)}(K_\delta^i)$ $\downarrow$ (当 $n\uparrow$). 对 $N=N(i,\delta), n>N, m\leqslant 2^N$，定义

$$\xi_{n,k}^m = \omega_{2^{-N}(m-1)+2^{-n}k} \quad (k=0,1,\cdots,2^{n-N}).$$

在 $\mu_x^{(n)}$ 下，$\{\xi_{n,k}^m; k=0,1,\cdots,2^{n-N}\}$ 是一个时齐马氏链. 由引理 6.19

$$\begin{aligned}
&\mu_x^{(n)}\left(\max_{0<k\leqslant 2^{n-N(i,\delta)}} |\xi_{n,k}^m - \xi_{n,0}^m| > \frac{\varepsilon_i}{2}\right) \\
&\leqslant 2 \max_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2^{n-N(i,\delta)} \\ x}} P\left(\omega; |\xi_{n,k}^m(\omega) - \xi_{n,0}^m(\omega)| > \frac{\varepsilon_i}{4} \,\middle|\, \xi_{n,0}^m = x\right) \\
&\leqslant 2\psi_{\frac{\varepsilon_i}{4}}(2^{-N(i,\delta)}).
\end{aligned}$$

于是由(6.20)及 $\mu_x^{(n)}(K_\delta^i)$ 的单调性，我们有

$$\mu_x^{(n)}[(K_\delta^i)^c] \leqslant 2^{N(i,\delta)} 2\psi_{\frac{\varepsilon_i}{4}}(2^{-N(i,\delta)}) < \frac{\delta}{2^i} \quad (\forall\, n).$$

从而

$$\mu_x^{(n)}(K_\delta) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^i} = 1 - \delta.$$

由于 K_δ 中函数为一致有界等度连续的，即 K_δ 是 $C[0,1]$ 中紧子集，于是 $\{\mu_x^{(n)}\}$ 是胎紧的，由定理 6.15 它就在弱收敛意义下是紧的，即 $\exists\, n_k\to\infty$ 与 $\mu_x \in \mathscr{P}(C[0,1])$，使得 $\mu_x^{(n_k)} \xrightarrow{d} \mu_x$. 由 2)，显见 $\mu_x = P_x$. ▎

推论 1 在定理 6.18 的条件下，若又给定初分布 $\rho_0(\mathrm{d}x)$，则存在 $(C[0,1], \mathscr{B}(C[0,1]))$ 上的测度 $\mu(\cdot)$，使得对 $\forall\, B \in \Sigma \equiv \mathscr{B}$，有

$$\mu(\omega; \omega_0 \in B) = \rho_0(B),$$

$$\mu(\omega; \omega_t \in B \mid \omega_u; u \leqslant s) = P(t-s; \omega_s, B).$$

证明 只需令

$$\mu(A)=\int\rho_0(\mathrm{d}x)\mu_x(A)\quad(\forall\ A\in B)$$

即可. ▌

推论 2 设$(C[0,1],\mathscr{B}(C[0,1]))$上测度列 $P^{(n)}$对应于初分布 ρ_n 及对 n 一致地满足 Dynkin-Kinney 条件的转移函数族,若$\{\rho_n\}$是 $\mathscr{P}(\mathscr{S}^d)$中相对紧集,则 $P^{(n)}$是 $\mathscr{P}(C[0,1])$中相对紧集.

证示:$\{P^{(n)}\}$胎紧.

推论 3 d-维 Brown 分布的随机过程一定可以在连续函数空间实现,也即 BM^d 一定存在.

证明 由于

$$\psi_\varepsilon(\delta)=\sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant\delta\\ x\in R^d}}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{|y-x|^2}{2t}}}{(\sqrt{2\pi t})^d}\mathrm{d}y\leqslant\int_{|y|>\frac{\varepsilon}{\delta}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\frac{1}{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta}}\right)^4}\int_0^{\infty}2y^4\frac{\mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}y=\frac{5\delta^2}{\varepsilon^4}=o(\delta),$$

从而定理 6.18 适用于 Brown 分布,因而它可在连续函数空间上实现. ▌

同样容易证明例 4,例 5 中的过程都可在连续轨道空间上实现(留做习题).

定理 6.18 的证明的 3)段,可以一般化,抽象为以下的定理.

定理 6.20 设 $\mu^{(n)}\in\mathscr{P}(C[0,1])(n\geqslant1)$满足以下条件:

C_1) 对 n 一致地有

$$\mu^{(n)}(\omega;|\omega_0|>N)\to0\quad(N\to+\infty);$$

C_2) 对任意 $\varepsilon>0$,对 n 一致地$\{\omega_t;t\in[0,1]\}$概率连续,即对 n 一致地

$$\mu^{(n)}(\max_{|t-s|<\eta}|\omega_t-\omega_s|>\varepsilon)\to0\quad(\eta\to0).$$

则 $\mu^{(n)}$具有弱收敛子列. 反之,逆命题也成立.

对一般的随机过程,我们还有一个关于它在连续函数空间上

实现的定理，它对于独立增量过程，使用起来特别方便. 下面我们给出这些定理，而略去其证明；读者可参阅[G]引理 2.27 或命题 3.2(第 211 页)，或[SV]第 47～51 页.

定理 6.21 设 ξ 是一个取值于可分 Banach 空间 $\mathscr{S}$ 中的随机过程，而且存在实数 $\beta>0$，$\alpha>0$ 与 $M>0$，使得

$$E\|\xi_t(\omega)-\xi_s(\omega)\|^{\alpha}\leqslant M|t-s|^{1+\beta},$$

则 ξ 可以在连续函数空间 $C([0,+\infty],\mathscr{S})$ 上实现，而且这个 $C([0,+\infty],\mathscr{S})$ 上定义的过程有

$$P\left(\omega;\|\omega_t-\omega_s\|\leqslant\left(\frac{M}{\delta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\frac{2|t-s|^{\alpha/\beta-2\varepsilon}}{(1-2^{-\varepsilon})(1-2^{-\beta\varepsilon})^{1/\beta}},\forall s,t\in[0,1]\right)$$
$$\geqslant 1-\delta$$

对某个 $\varepsilon>0$ 成立.

推论 设$\{P_\theta\in\mathscr{P}(C[0,1])\}$满足条件：

1) 存在正数 $\alpha,\beta,M>0$ 使

$$E_\theta|\xi_t-\xi_s|^{\beta}\leqslant M|t-s|^{1+\alpha};$$

2) 对所有 θ 一致地有

$$P_\theta(|\xi_0|\geqslant T)\to 0\quad(\text{当 }T\to+\infty),$$

则存在弱收敛子列(作为 $C[0,1]$上的测度).

5. $D[0,1]$上的测度

一般来说，给定了取值于度量空间的转移函数族$\{P(t;x,A)\}$，对应的马氏过程并不一定能在连续轨道上实现. 在第四章与第五章中我们已经看到了反例.

因此，我们退一步再考虑给定了转移函数，在什么条件下它决定的马氏过程可以是几乎全部轨道右连续而且具有左极限的，也即它可以在右连续、具有左极限的轨道空间(记为 $D[0,1]$)上实现. 令

$$D[0,1]\triangleq\{f;f:[0,1]\to\mathscr{S},\text{具有性质 1)}\sim\text{4)}\},$$

其中性质 1)～4)为：

1) $\lim\limits_{u\downarrow t} f_u = f_{t+}$， $\forall\ 0\leqslant t<1$；

2) $\lim\limits_{u\uparrow t} f_u = f_{t-}$， $\forall\ 0<t\leqslant 1$；

3) $f_{t+} = f_t$， $\forall\ 0\leqslant t<1$.

4) $f_{1-} = f_1$.

在 $D[0,1]$上，如果引入像在 $C[0,1]$上那样的距离，即使 $\mathscr{S} = \boldsymbol{R}^1$，我们所得到的度量空间也是不可分的. 这是因为若 $f_n \xrightarrow{一致} f$，那么 f 的间断点必定是 f_n(n 充分大)的间断点，而在$[0,1]$上可有不可数个彼此距离都为 1 的函数. 为此，在 $D[0,1]$上我们需要将原来的一致收敛拓扑略加修改，引入 Skorohod 拓扑.

令

$\Lambda = \{\lambda(\cdot);\lambda$ 是$[0,1]\to[0,1]$单调、一对一的在上连续映射$\}$.

定义 6.5(Skorohod 拓扑) 设有 $D[0,1]$中的函数序列 f_n，我们称 f_n 在 Skorohod 意义下收敛到 f(记为 $f_n \xrightarrow{sk} f$)，如果存在函数序列 $\lambda_n(t)$，使得

1) $\lambda_n(\cdot)\in\Lambda$；

2) $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\lambda_n(t)-t|\to 0 \quad (n\to+\infty)$；

3) $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|f_n(\lambda_n(t))-f(t)|\to 0 \quad (n\to+\infty)$.

令

$$\Lambda_\varepsilon = \{\lambda\in\Lambda;\ \sup_{t\in[0,1]}|\lambda(t)-t|\leqslant\varepsilon\},$$

$$d(x,y) = \inf\{\varepsilon>0;\exists\ \lambda\in\Lambda_\varepsilon,\text{使得}$$

$$\sup_{t\in[0,1]}|x(t)-y(\lambda(t))|\leqslant\varepsilon\}.$$

容易验证：$d(\cdot,\cdot)$是 $D[0,1]$上的一个距离. 而且对$\forall\ f_n,f\in D[0,1]$，称 $f_n\xrightarrow{sk}f$，如果 $d(f_n,f)\to 0$. 此外，应该指出：$C[0,1]\subset D[0,1]$，并且在 $C[0,1]$上，对$\forall\ f_n,f\in C[0,1]$，我们有

$$d(f_n,f)\to 0 \text{ 当且仅当 } f_n \xrightarrow{一致} f.$$

但不幸的是 $D[0,1]$在 $d(\cdot,\cdot)$下不完备. 如令

$$d_0(x,y)\triangleq\inf\{\varepsilon>0;\exists\ \lambda\in\Lambda_\varepsilon^*\ \text{使}$$

$$\sup_{t\in[0,1]}|x(t)-y(\lambda(t))|\leqslant\epsilon\},$$

其中

$$\Lambda_\epsilon^* \triangleq \left\{\lambda\in\Lambda;\sup_{s\neq t}\left|\log\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|\leqslant\epsilon\right\}.$$

可以证明 d_0 是与 d 等价的距离,而且在 $d_0(\cdot,\cdot)$下 $D[0,1]$完备[B].

还应注意,$d_0(\cdot,\cdot)$与 $D[0,1]$的线性结构是不相容的,因此 $D[0,1]$在 d_0 下并不是一个线性拓扑空间,然而是一个完备可分的度量空间,而且由开集生成的 σ-代数 $\mathscr{B}(D[0,1])$(拓扑 σ-代数)就是由坐标过程 f_t 生成的 σ-代数.

Varadhan[V.]利用 $D[0,1]$空间上概率分布的弱紧条件重新证明了 Kolmogorov 关于随机过程能在 $D[0,1]$空间上实现的矩条件的定理及 Dynkin 关于马氏过程能在 $D[0,1]$空间上实现的一致 $o(1)$条件的定理.这不仅在方法上更统一、更现代化,而且更符合直观.由于 Varadhan 的证明很难在一般书上找到,但它太长,我们在这里介绍 Varadhan 的证明纲要.为此,我们先列出 $D[0,1]$空间上连续模的一系列事实,它们是不难证明的(可参见[B]).

记

$$\omega_f[a,b]\triangleq\sup_{s,t\in[a,b]}|f_t-f_s|$$

($\omega_f(a,b)$是 f 在$[a,b]$上的最大振幅),

$$\widetilde{\omega}_f(\delta)\triangleq\sup_{b-a<\delta}\inf_{c\in[a,b]}(\omega_f[a,c]\vee\omega_f[c,b]),$$

$$\omega_f^*(\delta)\triangleq\sup_{s<u<t<s+\delta}(|f_t-f_u|\wedge|f_u-f_s|),$$

则我们有

1) $\omega_f^*(\delta)\leqslant\widetilde{\omega}_f(\delta)\leqslant3\omega_f^*(\delta)$;

2) 对于有界函数 f,有 $f\in D[0,1]$当且仅当 $\widetilde{\omega}_f(\delta)\to0(\delta\to0)$(或 $\omega_f^*(\delta)\to0,\delta\to0$).

3) $\mathscr{A}(\subset D[0,1])$是 $D[0,1]$中相对紧集的充要条件为满足

以下两条件

(K_1) $\mathscr{A}$ 中所有函数在[0,1]的一个稠集上一致有界；

(K_2) 对 $f\in\mathscr{A}$ 一致地有

$$\widetilde{\omega}_f(\delta)+\omega_f[0,\delta]+\omega_f[1-\delta,1]\to 0\quad(\delta\to 0)$$

(参见[B]Th14.4).

定理 6.22 取值 R^d 的随机连续的随机过程 ξ 如果满足下列的 Kolmogorov 矩条件：$\exists\ p,q\geqslant 0,r>0$ 及 $\forall\ 0\leqslant t_1<t_2<t_3\leqslant 1$，有 $C>0$ 使

$$E(|\xi_{t_2}-\xi_{t_1}|^p|\xi_{t_3}-\xi_{t_2}|^q)\leqslant C|t_3-t_1|^{1+r},$$

那末 ξ 可以在 $D[0,1]$ 中实现，即$\exists\ D[0,1]$上测度 Q，使 $D[0,1]$ 坐标过程 f_t 在 Q 下的分布与 ξ_t 在 P 下分布相同.

其证明大体有下述几步：

第一步：对于 $0<\alpha<1,M>0$，令

$$L_m=\left\{f.\in D[0,1];\forall\ n\geqslant m,j\leqslant 2^n-1,\text{有}\right.$$
$$\left.\left|f_{\frac{j+1}{2^n}}-f_{\frac{j}{2^n}}\right|\vee\left|f_{\frac{j}{2^n}}-f_{\frac{j-1}{2^n}}\right|<M\alpha^n\right\},$$

则

1) $\forall\ f\in L_n$,

$$\omega_f^*\left(\frac{1}{2^n}\right)\leqslant 2M\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\quad(\text{从而}\sup_{L_n}\omega_f^*(\delta)\to 0(\delta\to 0)).$$

2) 对于 $0<\alpha<1,M>0$，使

$$\rho=\frac{1}{\alpha^{p+q}}\frac{1}{2^r}<1\text{ 及}\frac{2^{1+r}}{M^{p+q}}=\frac{1}{C},$$

有

$$P(L_n)\geqslant 1-\frac{\rho^n}{1-\rho}.$$

第二步：作 ξ_t 的阶梯近似. 令

$$\xi_t^{(n)}\triangleq\sum_{j=0}^{n-1}\xi_{\frac{j}{n}}1_{[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n})}(t)+\xi_{1-\frac{1}{n}}1_{\{1\}}(t),$$

$$P^{(n)} \triangleq P_0(\xi^{(n)})^{-1}.$$

则对 $D[0,1]$坐标过程 $f_\cdot = f_t$ 有：

$$E^{P^{(n)}}(|f_{t_2} - f_{t_1}|^p |f_{t_3} - f_{t_2}|^q) = E(|\xi_{t_2}^{(n)} - \xi_{t_1}^{(n)}|^p |\xi_{t_3}^{(n)} - \xi_{t_2}^{(n)}|^q)$$
$$\leqslant 3^{1+r} C |t_3 - t_1|^{1+r}.$$

由第一步之 2)可选 N，当 $n \geqslant N$ 时有 $P^{(n)}(L_n) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{3}$. 另一方面由 ξ_t 的随机连续性，可推出当 A 很大时，$P^{(n)}(|\xi_t| > A)$ 对 n 一致地小，且当 t 小时 $P^{(n)}(|\xi_t - \xi_0| \geqslant \varepsilon)$，$P^{(n)}(|\xi_{1-t} - \xi_1| \geqslant \varepsilon)$ 也对 n 一致地小. 选 N，使 $n \geqslant N$ 时有 $P^{(n)}(L_n) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{3}$. 令

$$K = L_N \cap \{|\xi_{t_j}| \leqslant A_j;\text{一切有理数 } t_j \in [0,1]\}$$
$$\cap \{|\xi_{\alpha_j} - \xi_0| \leqslant \delta_j; \alpha_j \downarrow 0\} \cap \{|\xi_{\beta_j} - \xi_1| \leqslant \delta_j; \beta_j \uparrow 1\}.$$

可以证明：选取适当的 A_j, δ_j 可使 $P^{(n)}(K) > 1 - \varepsilon$，而且 K 是 $D[0,1]$紧集；于是 $P^{(n)}$胎紧，从而由 Prohorov 定理得到$\{P^{(n)}\}$是 $\mathscr{P}(D[0,1])$中相对紧集.

第三步：任取$\{P^{(n)}\}$的一个弱极限点($D[0,1]$上测度)Q，由 ξ_t 的随机连续性可推出 $D[0,1]$的坐标过程 f_t 在 $P^{(n)}$下对 n 的一致随机连续性，从而得到 f_t 在 Q 下的随机连续性，最后导致 $P^{(n)}$的有限维分布趋于 Q 的有限维分布. 从而 ξ 的有限维分布与 Q 的相同. ▌

在定理 6.22 的证明过程中，实际上也证明了

定理 6.23 设取值于 $\boldsymbol{R}^d$ 的 $D[0,1]$上测度列 $P^{(n)}$对坐标过程 f 满足

1) 一致 Kolmogorov 矩条件：$\exists\ p,q \geqslant 0, r > 0, C > 0$，使

$$E^{P^{(n)}}(|f_{t_2} - f_{t_1}|^p |f_{t_3} - f_{t_2}|^q) \leqslant C|t_3 - t_1|^{1+r}$$

(对$\forall\ 0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant 1$)；

2) $P^{(n)}(|f_t| \geqslant A) \to 0 (A \to \infty)$在 t 的一个稠集上关于 n 一致成立；

3) f_t 关于 $P^{(n)}$在 $t=0,1$ 关于 n 一致地随机连续，

那末，$\{P^{(n)}\}$是 $\mathscr{P}(D[0,1])$中相对紧集.

定理 6.24 给定 $\boldsymbol{R}^d$ 上转移函数$\{P(t;x,A)\}$，如果满足一致 $o(1)$条件：$\psi_\varepsilon(\delta)=o(1)(\delta\downarrow 0)$，则它可以在 $D[0,1]$上实现.

注：$D[0,1]$可改为 $D(\boldsymbol{R}^+)$.

其证明大体与定理 6.18 及定理 6.22 相仿：先构造一个以$\{P(t;x,A)\}$为转移函数的马氏过程 $\eta(t)$，由一致 $o(1)$条件可知 $\eta(t)$随机连续. 为找 $\eta(t)$的右连左极修正，构造 $P^{(n)}$如定理 6.22. 最主要之点为证明

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_n P^{(n)}(\omega_f^*(\delta)\geqslant\varepsilon)=0,$$

其中 $P^{(n)}$，$\omega_f^*(\delta)$起的作用恰如定理 6.18 中 $\mu_x^{(n)}$，$\sup\limits_{|t-s|<\delta}|\omega_t-\omega_s|$. 为了证明它，考虑马氏链 $\xi_0,\xi_{\frac{1}{n}},\cdots,\xi_{\frac{n-1}{n}}$及停时

$$\tau_0=0,$$

$$\tau_k=\inf\{j>0,|\xi_{\frac{\tau_1}{n}+\cdots+\frac{\tau_{k-1}}{n}+\frac{j}{n}}-\xi_{\frac{\tau_1}{n}+\cdots+\frac{\tau_{k-1}}{n}}|>\varepsilon\},$$

$$k_0=\max\{j:\tau_j\leqslant n-1\},$$

便有

$$\begin{aligned}&P^{(n)}(\tau_1\wedge\cdots\wedge\tau_{k_0}\leqslant n\delta)\\&\quad\leqslant P^{(n)}\left(\frac{\tau_1}{n}\leqslant\delta\right)+\cdots+P^{(n)}\left(\frac{\tau_k}{n}\leqslant\delta\right)\\&\quad\quad+P^{(n)}\left(\frac{\tau_1+\cdots+\tau_{k+1}}{n}\leqslant 1\right)\quad(\forall\ k)\end{aligned}$$

和

$$P^{(n)}\left(\frac{\tau_j}{n}\leqslant\delta\right)\leqslant\frac{\psi_{\frac{\varepsilon}{2}}(\delta)}{1-\psi_{\frac{\varepsilon}{2}}(\delta)}$$

以及

$$\sup_n P^{(n)}\left(\frac{\tau_1+\cdots+\tau_k}{n}\leqslant 1\right)\triangleq\rho_k(\varepsilon)\to 0\quad(k\to\infty).$$

于是

$$P^{(n)}(\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_{k_0} \leqslant n\delta) \leqslant \inf_k \left[k \frac{\psi_{\frac{\varepsilon}{2}}(\delta)}{1 - \psi_{\frac{\varepsilon}{2}}(\delta)} + \rho_{k+1}(\varepsilon) \right]$$

$$= o(1) \quad (\delta \to 0).$$

再由

$$\{\omega_f^*(\delta) > 2\varepsilon\} \subset \{\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_{k_0} \leqslant n\delta\}$$

就推出所要的极限式.

余下的只要仿定理 6.18 的证明即可.

推论 1 在定理 6.24 的条件下,若又给定初分布 $\rho_0(\mathrm{d}x)$,则存在$(D[0,1],\mathscr{B}(D[0,1]))$上的测度 $\mu(\cdot)$,使得对$\forall\ B \in \mathscr{B}$,有

$$\mu(\omega:\omega_0 \in B) = \rho_0(B),$$

$$\mu(\omega:\omega_t \in B | \omega_u, u \leqslant s) = P(t-s, \omega_s, B).$$

推论 2 设$(D[0,1],\mathscr{B}(D[0,1]))$上测度列 $P^{(n)}$对应于初分布 ρ_n 及对 n 一致地满足一致 $o(1)$条件($\psi_\varepsilon^{(n)}(\delta)=o(1)(\delta \downarrow 0$,对 n 一致))的转移函数族,若$\{\rho_n\}$是 $\mathscr{P}(\boldsymbol{R}^d)$中相对紧集,则 $P^{(n)}$是 $\mathscr{P}(D[0,1])$中相对紧集.

推论 3 随机连续的 d 维时齐独立增量过程$\{\xi_t:0\leqslant t\leqslant 1\}$可以在 $D[0,1]$中实现(即存在轨道属于 $D[0,1]$的时齐独立增量过程 $\tilde{\xi}_t$,使 $\tilde{\xi}$ 与 ξ 有相同的转移函数族($\tilde{\xi}$ 是 Levy 过程).

注 1:过程 ξ_t 称为随机连续的,如果$\forall\ \varepsilon>0$ 有

$$P(|\xi_{t+s} - \xi_t| \geqslant \varepsilon) \to 0 \quad (s \to 0).$$

注 2:时齐的马氏过程为独立增量过程当且仅当其转移函数是空间齐次的,即$\forall\ y$ 有

$$P(t;x,\Gamma) = P(t;x+y,\Gamma+y),$$

其中 $\Gamma+y=\{x+y:x\in\Gamma\}$.

注 3:时齐的独立增量过程(只要利用注 2)为随机连续当且仅当转移函数满足一致 $o(1)$条件:

$$\psi_\varepsilon(\delta) \to 0 \quad (\delta \to 0).$$

例 6.7(Cauchy 过程)转移密度

$$p(t;x,y) = \frac{t}{\pi(t^2 + (y-x)^2)}.$$

由第五章讨论的例子可知，它对应的马氏过程可以在 $D[0,+\infty)$ 上实现，但不能在 $C[0,+\infty)$ 上实现（见例 5.1）。这时

$$\psi_\varepsilon(\delta) = \sup_{t\leqslant\delta}\int_{|y-x|\geqslant\varepsilon}\frac{t}{\pi(t^2+(y-x)^2)}\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}(\delta\varepsilon),$$

这里 $\psi_\varepsilon(\delta)=o(1)$，但 $\psi_\varepsilon(\delta)\neq o(\delta)$。

有关本节的内容的细节，可参考[B]。

习　题

1. 设 x_0 是取值于 $\boldsymbol{R}^1$ 的随机变量，$x_t=x_0+t$。试证明 $\{x_t;t\geqslant 0\}$ 是一个马氏过程，$P_tf(x)=f(x+t)$；而且 $\mathscr{A}f(x)=f'(x)$，$\mathscr{A}$ 的定义域 $\mathscr{D}(\mathscr{A})=C_u^{(1)}$（函数本身及其导数一致连续有界）。

提示：先证明 $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ 中的 f 必定一致连续；再证明 $\frac{1}{t}(f(x+t)-f(x))$ 的一致收敛极限 $(t\downarrow 0)$ 仍是有界一致连续函数，也即 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 有界一致连续；最后证明 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=f(x)$。

2. 令 x_t 是常微分方程 $\dot{x}_t=b(x_t)$ 之解，其中 $b(x)\in\boldsymbol{R}^d$，

$$P_tf(x) = f(x_t).$$

试证明一切一阶连续可导的紧支集函数在 $\{P_t\}$ 的生成元 $\mathscr{A}$ 的定义域中，而且

$$\mathscr{A}f(x) = \sum_{i=1}^{d}b^i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

3. 试求 Poisson 过程对应的半群与无穷小生成元。

4. 令

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix},$$

试求由 $\boldsymbol{Q}$ 决定的强连续收缩正半群及它对应的马氏过程的转移阵 $\boldsymbol{P}(t)$。

答案：

$$P(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{2+e^{-3t}}{3} & \dfrac{1-e^{-3t}}{3}\\ \dfrac{2-2e^{-3t}}{3} & \dfrac{1+2e^{-3t}}{3}\end{bmatrix}.$$

5. 设 $Q=(q_{ij})$ 使 $q_{ij}\geqslant 0(i\neq j)$，$\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}=-q_{ii}=q_i>0$，而且 $\sup\limits_i q_i<+\infty$. 试求出以 Q 为 Q-矩阵的 Q-过程对应的半群及其生成元.

6. 在上题中如取消条件 $\sup\limits_i q_i<+\infty$，对应于 Q 的最小 Q-过程的半群及其生成元是怎样的？

7. 设 $\{B_t;t\in \boldsymbol{R}^+\}$ 与 $\{|B_t|;t\in \boldsymbol{R}^+\}$ 分别是 Brown 运动与反射 Brown 运动. 令

$$C_2^0=\{\text{具有二阶连续导数的紧支集正函数}\}.$$

试证若 $\forall\ f\in C_2^0$，且 f 的支集在 $(0,+\infty)$ 中，则 f 同时在上述两个过程的生成元定义域中，并且两个生成元对 f 作用的值都是 $\dfrac{1}{2}f''$. 试设法构造上述两过程对应的半群.

提示：取

$$B_0^{(1)}(\boldsymbol{R})=\{f;f\text{ 是 }\boldsymbol{R}\text{ 上有界一致连续函数}\}=C_u(\boldsymbol{R}),$$

$$B_0^{(2)}(\boldsymbol{R})\triangleq C_u(\boldsymbol{R}^+)\cap\{f;f'(0+)=0\}.$$

8. 令

$$p(t;x,y)=\frac{t}{\pi(t^2+(x-y)^2)}.$$

称以 $\{p(t;x,y)\}$ 为转移密度族的马氏过程为 Cauchy 过程. 试证明它的无穷小生成元的定义域 $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ 包含

$$C_u^{(2)}=\{f;f\text{ 的二阶导数一致连续}\},$$

而且对 $f\in C_u^{(2)}$，

$$\mathscr{A}f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[f(y)-f(x)-f'(x)\mathrm{tg}^{-1}(y-x)]}{(y-x)^2}\mathrm{d}y,$$

其中 $\mathrm{tg}^{-1}(x)=\mathrm{arctg}x$.

提示: $\int \frac{1}{1+z^2}\mathrm{tg}^{-1}z\mathrm{d}z=0$.

9. 试证明一个收缩半群 $\{P_t\}$ 使得 $P_t1=1$ 当且仅当 $1\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$, 且 $\mathscr{A}1=0$.

10. 试证明:若当 $\delta\to 0$, 有

$$\psi_\delta(\varepsilon)=\sup_{\substack{x\in\mathscr{S}\\0\leqslant t\leqslant\delta}}P(t;x,\{y:d(x,y)\geqslant\varepsilon\})\to 0,$$

则对取值于 $\mathscr{S}$ 中, 以 $\{P(t;x,A)\}$ 为转移函数的马氏过程的半群的强连续中心一定包含全体一致连续函数.

11. 求习题1中过程的弱生成元.

12. 设 $\{P(t;x,A)\}$ 是一个紧度量空间 $\mathscr{S}$ 上的马氏过程的转移函数, 并且 $C(\mathscr{S})$($\mathscr{S}$ 上连续函数)在它的半群的强连续中心 B_0 中. 试证明

$$\varphi_\delta(\varepsilon)\to 0\quad(\delta\to 0)(\varphi_\delta(\varepsilon)\text{ 的定义见 10 题}).$$

13. 试证明:对 $\forall\ \lambda_1,\lambda_2>0$, 半群的预解式 R_λ 有:

$$R_{\lambda_2}f=R_{\lambda_1}f+(\lambda_1-\lambda_2)R_{\lambda_1}R_{\lambda_2}f;$$

并由此证明: $R_\lambda B_0$ 与 λ 无关.

14. 试求证一个时齐马氏过程若为 Gauss 过程, 而且均值为 0, 则其转移概率具有如下形式:

$$P(t;x,A)=\int_A\frac{1}{\sqrt{\pi\frac{a}{b}(\mathrm{e}^{2bt}-1)}}\exp\left\{-\frac{2(y-\mathrm{e}^{bt}x)^2}{\frac{a}{b}(\mathrm{e}^{2bt}-1)}\mathrm{d}y\right\},$$

而且 C_0^2(一切二阶导数连续的紧支集实函数全体)$\subset\mathscr{D}(\mathscr{A})$, 进一步求:

(1) $\mathscr{A}$ 在 C_0^2 上的表达式;

(2) 当 $b<0$ 时的平稳分布 μ;

(3) 设 $\xi=\{\xi_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$ 是以 μ 为初分布 $p(t;x,A)$ 为转移函数的平稳马氏过程, 记 $R(t)=E\xi_t\xi_0$, 试用 $R(\cdot)$ 表示 a 与 b.

15. 令 $\xi_t=\xi_0+t$, $\mathscr{F}_t=\sigma(\xi_u;u\leqslant t)$, 其中 ξ_0 是取值于 $(\boldsymbol{R}^1,\mathscr{B}^1)$

的随机变量. 试证明$\{\xi_t,\mathscr{F}_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$是一个 Feller 过程. 又令$\{\eta_t;t\geqslant 0\}$是具有下面的转移概率族$\{P(t;x,A)\}$的马氏过程

$$P(t;x,A)=\begin{cases}\delta_{x+t}(A), & x>0;\\ \delta_{x-t}(A), & x<0;\\ \dfrac{1}{2}[\delta_t(A)+\delta_{-t}(A)], & x=0.\end{cases}$$

试证明$\{\eta_t\}$不是 Feller 过程.

16. 设$\{B_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$是一个 Brown 运动，令 $\tau=\inf\{t>0;B_t\overline{\in}(0,1)\}$，又设 $B_0=x\in(0,1)$. 若将 B_t 在 τ 以后截止，而得取值于$(0,1)$的马氏过程 η. 求 η 的无穷小生成元作用到在$(0,1)$上二阶导数有界而且一致连续的函数上的取值.

17. 证明 Blumenthal 0-1 律：若马氏过程$\{\eta_t,\mathscr{F}_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$是一个轨道右连续的 Feller 过程，$B\in\bigcap\limits_{t>0}\mathscr{F}_t$，则 $P(B)=0$ 或 1.

18. 设$\{\xi_t,\mathscr{F}_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$是右连续 Feller 过程，令

$$\tau(\omega)=\operatorname{int}\{t>0,\xi_t\neq x\},$$

则存在 $\lambda(x)\geqslant 0$ 使得

$$P_x(\tau>t)=\mathrm{e}^{-\lambda(x)t}\quad(t>0),$$

而且 τ 与 ξ_τ 相互独立.

提示：先证 $P_x(\tau>t+s)=P_x(\tau>t)P_x(\tau>s)$.

19. 设$\{\xi_n,\mathscr{F}_n;n\geqslant 0\}$是马氏链(状态空间不一定离散)，令

$$\tau(\omega)=\begin{cases}\min\{n\geqslant 1;\xi_n\neq x\}, & 当\ \xi_n\not\equiv x;\\ +\infty, & 当\ \xi_n\equiv x.\end{cases}$$

证明：存在 $q(x)\in[0,1]$使得

$$P_x(\tau=n)=(1-q(x))q(x)^{n-1},$$

而且 τ 与 ξ_τ 相互独立.

20. 令

$$\mathscr{D}(\mathscr{A})=\{f\in C_2[0,1];\ f'(0+)=f'(1-)=0\},$$

$$\mathscr{A}f=\frac{1}{2}f''\quad(\forall\ f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})).$$

证明：$\mathscr{A}$ 是一个强连续收缩正半群 P_t 的无穷小生成元，而且 P_t 的强连续中心(定义域)为

$$C[0,1],\ P_t 1 = 1.$$

21. 试证上题的半群对应一个马氏过程；记其转移函数为 $\{P(t;x,\mathrm{d}y)\}$，则

$$\sup_x \frac{P(t;x,\{y;|x-y|\geqslant \varepsilon\})}{t} \to 0 \quad (t \downarrow 0).$$

提示：注意对 $\forall\ x\in[0,1]$ 及 $\varepsilon>0$，存在 $f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$，$f\geqslant 0$，并使 $f(y)=0$，当 $|x-y|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$；$f(y)>0$，当 $|x-y|\geqslant\frac{2}{3}\varepsilon$.

22. 用条件期望的形式，写出如下方程的解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t} = \mathscr{A}W + CW + g(x),\\ \lim\limits_{t\downarrow 0} W(t,x) = f(x),\end{cases}$$

其中 $\mathscr{A}$ 是马氏过程 $\xi=\{\xi_t,\mathscr{F}_t\}$ 的生成元，$f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$.

提示：考虑 $v(t,x)=\int_0^t E_x(g\xi_u)\,\mathrm{d}u$.

23. 设 $\{\xi_t,\mathscr{F}_t;t\in\boldsymbol{R}^1\}$ 是时齐强马氏过程. 令 $\xi_0=0$，

$$\tau_1 = \inf\{t>0;\xi_t=1\},$$
$$\tau_2 = \inf\{t>0;\xi_{t+\tau_1}=0\}.$$

已知

$$P(\tau_1<+\infty)=1,\ P(\tau_2<+\infty)=1.$$

又令

$$\tau_{2n} = \inf\{t>0;\xi_{t+\tau_{2n-1}}=0\},$$
$$\tau_{2n+1} = \inf\{t>0;\xi_{t+\tau_{2n}}=1\},\ n\geqslant 1.$$

求证：$\{\tau_{2n};n=1,2,\cdots\}$ 与 $\{\tau_{2n-1};n=0,1,\cdots\}$ 都是独立同分布序列.

24. 试证明定理 6.8 的条件：Feller 过程这一要求可放宽为存在一个有界可测函数集 $\mathscr{B}$ 的子集合 $\mathscr{B}_0$，使 $\mathscr{B}_0$ 在有界收敛意义下在 $\mathscr{B}$ 中稠，并且对 $\forall\ f\in\mathscr{B}_0$，$P_t f(x)$ 是连续函数.

25. 设

有右连续的 Feller 过程 $\xi=\{\xi_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$，$D$ 是 ξ 的状态空间 $\mathscr{S}$ 中的一个开集. 令

$$\tau=\inf\{t>0;\xi_t\overline{\in}D\};$$

又若存在常数 T 与 $\delta>0$，使得

$$P_x(\tau<T)>\delta \quad (\text{对}\ \forall\ x\in D\ \text{成立}).$$

则对 $\forall\ x$，

$$P_x(\tau\geqslant nT)\leqslant(1-\delta)^n,$$

而且

$$E_x\tau\leqslant\frac{T}{\delta}.$$

26. 在上题若 $\overline{D}$ 是一个紧集，$P_x(\tau<\infty)>0$ 对 $\forall\ x\in D$ 成立，则 $E_x\tau$ 有界.

27. 试举例说明距离空间上的概率测度 $\mu_n\xrightarrow{d}\mu$ 并不能保证对 $\forall$ 可测集 A 与有界可测函数 f，有

$$\mu_n(A)\to\mu(A)\quad\text{与}\quad\int f\mu_n(\mathrm{d}x)=\int f\mu(\mathrm{d}x)$$

成立.

提示：考虑独立同分布具有分布密度 $p(x)$ 的序列 ξ_n. 及 $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$，$S_n$ 在 $\boldsymbol{R}^1$ 上决定一测度族，它是弱收敛的.

28. 设 μ 是完备可分距离空间 X 上的概率测度，试证明它是胎紧的.

29. 设 μ,ν 是完备可分距离空间 X 上的两个测度，则 $\mu=\nu$ 当且仅当

$$\int f(x)\mu(\mathrm{d}x)=\int f(x)\nu(\mathrm{d}x)$$

对 $\forall\ f\in C(X)$ 成立.

30. 试证明：一个完备可分距离空间上概率测度是正则的，即对任意可测集 A，

$$\mu(A)=\inf_{G\supset A}\mu(G)=\sup_{C\subset A}\mu(C),$$

其中 G,C 分别取遍一切开集与闭集.

31. 试证明：对任意的独立同分布序列$\{X_n\}$，若满足

$$EX_i = 0,\ EX_i^2 = 1,\ EX_i^4 = M < +\infty,$$

令

$$X_n(0) = 0,$$

$$X_n(t) = \begin{cases} X_j, & \text{当 } t = \dfrac{j}{n}(j = 1,2,\cdots); \\ \text{线性插值}, & \text{在}\left(\dfrac{j-1}{n},\dfrac{j}{n}\right)\text{中}(i = 1,2,\cdots,n), \end{cases}$$

P_n 是由$\{X_n(t), t\in[0,1]\}$决定的分布，则 P_n 在 $C[0,1]$中弱收敛到 Brown 运动的分布.

提示：利用定理 6.18.

32. 试证明：若马氏过程 ξ 的转移函数满足 Dynkin-Kinney 条件，则它的生成元一定是局部的：即对

$$f(x) = g(x)\quad (\text{对 } x \in \{y; |y - x_0| < \varepsilon\} \text{ 成立}),$$

$$f, g \in \mathscr{D}(\mathscr{A}),$$

则

$$\mathscr{A}f(x) = \mathscr{A}g(x)\quad (\text{对 } x \in \{y; |y - x_0| < \varepsilon\} \text{ 成立}).$$

33. 设马氏过程 X 是取值于紧距离空间 $\mathscr{S}$ 的马氏过程，其转移函数族为$\{p(t;x,A)\}$，其无穷小生成元为 $\mathscr{A}$，$\mathscr{D}(\mathscr{A})$是 $\mathscr{A}$ 的定义域. 若对$\forall\ x_0\in\mathscr{S}$，存在非负函数 $f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$，使得

$$f(x) = 0,\ \text{当 } |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$f(x) > 0,\ \text{当 } |x - x_0| \geqslant \frac{2\varepsilon}{3},$$

则对$\{p(t;x,A)\}$Dynkin-Kinney 条件成立.

34. σ 有限测度 μ 称为马氏过程 ξ 的不变测度，如果

$$\int p(t;x,\Gamma)\mu(\mathrm{d}x) = \mu(\Gamma)\quad (\forall\ \Gamma \text{ 可测}),$$

证明 BM^d 不存在有限不变测度.

第七章 相互作用粒子系、渗流与点过程的数学模型

近二十年来，若干个新的随机过程分支迅速地发展起来. 它们不仅本身具有丰富的数学内容，提出了大量富于刺激性的新问题，与其它领域建立了许多出乎预料的联系；而且其中有不少反过来对发源它们的领域有了深刻的影响. 例如，相互作用粒子系、渗流等问题是由统计物理中的问题提出的，在六十年代末开始形成为一个数学分支，近年来这个方向上的发展对统计物理产生了很大影响，被誉为数学反过来向物理输出的范例之一.

作为一本随机过程基础的教材，本书不可能深入地对这分支展开讨论. 本章的意图是向读者简单介绍这些领域中的基本模型与概貌. 有兴趣的读者可进一步参阅有关专著[L]，[D_1]，[Ch]，[Sn]，[DV]，[Ka]等书.

§1 相互作用粒子系的数学模型

1. 例与简单的概念

由于经典的 Gibbs 平衡态中出现了有趣而有吸引力的相变现象，自然地，人们希望能对以 Gibbs 态为平稳测度的动态发展过程给出清晰的描述，从而提出了相互作用粒子系的数学模型—— 一种新型的马氏过程. 从数学的角度看，它是马氏过程发展的新起点，它提出了一系列具有刺激作用的新问题与新方法.

为了使读者易于了解，让我们从两个极端简单的粒子系统的描述出发.

例 1（有限铁磁粒子系） 设有 N 个铁磁粒子，其中每个可处

于正负极两种状态(以±1 表示). 令 $S=\{1,2,\cdots,N\}$, $\mathscr{S}=\{-1,1\}^N$. 粒子系可能的状态是 $\mathscr{S}$ 中的一个元素,称之为一个态或状态. S 中的一个元素称为一个格点. 我们将在格点 x 的粒子在时刻 t 的状态记为 $\xi_t(x)$,整个系统在时刻 t 的状态记为 $\xi_t(=\{\xi_t(x);x\in S\})$. 则 $\xi=\{\xi_t;t\geqslant 0\}$ 是一个时齐马氏过程,而且

$$P\Big\{\sum|\xi_{t+\Delta}(x)-\xi_t(x)|>2\Big\}=o(\Delta), \tag{7.1}$$

$$P(\xi_{t+\Delta}={}_x\eta|\xi_t=\eta)=c(\eta,x)\Delta+o(\Delta), \tag{7.2}$$

其中

$$_x\eta=(\tilde{\eta}(u);u\in S),$$

$$\tilde{\eta}(u)=\eta(u)\text{ 当 }u\neq x;\ \tilde{\eta}(x)=-\eta(x).$$

显然这时 ξ 是一个以 $\mathscr{S}$ 为状态空间的有限马氏链(Q-过程).

$$q_{\eta\zeta}=\begin{cases}c(\eta,x), & \zeta={}_x\eta;\\ 0, & \zeta\overline{\in}\{_x\eta;x\in S\}\cup\{\eta\};\\ -\sum\limits_{x\in S}c(\eta,x), & \zeta=\eta.\end{cases}$$

(7.1)式意味着在无穷小时间内只允许最多有一个粒子改变状态;而(7.2)式说明粒子系统 ξ 在组态 η 时,它位于格点 x 处的状态发生变化的速率是 $c(\eta,x)$. 于是 ξ. 是以 $(q_{\eta\zeta})$ 为 Q-阵的马氏链,它与 BM^d 不同,后者满足

$$\lim_{\Delta\downarrow 0}\sup_x\frac{1}{\Delta}P(\Delta;x,|x-y|\geqslant\varepsilon)=0,$$

因而具有连续轨道,但满足(7.2)的前者则不可能.

这里讨论的是有限粒子系,然而有趣的相变现象恰巧只在无穷粒子系中发生.

例 2(相互独立的粒子系) 设在例 1 中,S 改为 $S=\boldsymbol{Z}^d$(可数集),但 $c(\eta,x)=c(\eta(x),x)$ 与 η 在其它位置的状态无关,这意味着各粒子的运动是相互独立的,因而可将 ξ. 看成是可列个相互独立的随机过程 $\{\xi.(x);x\in S\}$ 来处理. 这就与许多经典概率论的问题并无多大差别了.

然而最有兴趣的却是无穷的相互作用粒子系.

例 3(无穷相互作用铁磁粒子系) 在例 1 中 S 改为 $S=\mathbf{Z}^d$,这时可能

$$\sum_{x\in S} c(\eta,x)=+\infty. \tag{7.3}$$

于是至少它不再是可数状态马氏链. 在(7.3)成立时,η 就是瞬时状态. 这样的马氏过程既不同于我们在第四章研究过的可数状态马氏链,也不同于像 BM^d 这样的连续过程.

对于不可约可数(或有限)状态马氏链(Q-过程),我们不难得到它的有限不变测度最多只有一个,设为$\{\mu_i\}$. 而且这时

$$p_{ij}(t)\to\mu_j \quad (\text{当 } t\to+\infty).$$

因而无论从什么初分布出发,$\boldsymbol{P}=(p_{ij})$决定的过程 ξ 满足

$$P(\xi_t=j)\to\mu_j \quad (\text{当 } t\to+\infty). \tag{7.4}$$

但是对于例 3 中那样的系统,当 $d\geqslant 2$,就有可能有多个不变测度,因而从不同的初分布出发,(7.4)中的极限就不同了.

当 $c(\eta,x)$依赖于某一参数 α;$c(\eta,x)=c(\eta,x,\alpha)$,而当 α 取不同的值,不变测度的唯一性(或个数)发生变化就称为相变发生. 这是无穷相互作用粒子系统特有的现象.

一般地,可取 $\mathscr{S}=E^S$,其中 E 是一个格点上的可能状态集,很多问题中取 E 为一紧集,S 为一可数集,通常是 $\mathbf{Z}^d$,而在无穷小时间,最多允许有有限个粒子(格点)同时改变,即

$$P\Big(\sum_{x\in S}|\xi_{t+\Delta}(x)-\xi_t(x)|=+\infty\Big)=o(\Delta). \tag{7.5}$$

这时相应于(7.2)的是

$$P(\xi_{t+\Delta}=\eta_T^\zeta,\zeta\in A\,|\,\xi_t=\eta)=c_T(\eta,A)\Delta+o(\Delta), \tag{7.6}$$

其中

$$\eta_T^\zeta(x)=\begin{cases}\eta(x), & x\overline{\in} T;\\ \zeta(x), & x\in T.\end{cases}$$

T 为 S 中有限集,$A\subset E^T$. 而 $c_T(\eta,\mathrm{d}\zeta)$称为速度函数. 因而(7.5)与(7.6)就决定了过程的"形式无穷小生成元"$\mathscr{A}$ 应为

$$\mathscr{A}f = \sum_{\substack{T\subset S \\ T\text{有限}}} \int [f(\eta_T^\zeta) - f(\eta)] c_T(\eta, \mathrm{d}\zeta). \qquad (7.7)$$

(7.7)可由(7.5),(7.6)不严格地如下导出：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t}(P_t f - f(\eta)) \\ &= \frac{1}{t}\int (f(\bar\eta) - f(\eta)) P(t;\eta,\mathrm{d}\bar\eta) \\ &= \frac{1}{t}\sum_T \int_{E^T} (f(\eta_T^\zeta) - f(\eta))[tc_T(\eta,\mathrm{d}\zeta) + o(t)] \\ &\xrightarrow[\text{当 } t\downarrow 0]{} \sum_T \int_{E^T} (f(\eta_T^\zeta) - f(\eta)) c_T(\eta,\mathrm{d}\zeta). \end{aligned}$$

为了给出 $\mathscr{A}$ 的定义域中的一个方便的稠子集，令

$$\Delta_f(x) \triangleq \sup\{|f(\eta) - f(\zeta)|; \eta,\zeta \in \mathscr{S}, \ \eta(y) = \zeta(y) \text{ 对 } \forall\, y \neq x\},$$

$$\mathscr{K}(\mathscr{S}) = \{f \in C_b(\mathscr{S}); |||f||| \triangleq \sum_{x\in S}\Delta_f(x) < +\infty\}.$$

可以证明：$\mathscr{K}(\mathscr{S})$在$C_b(\mathscr{S})$中稠，而且当

$$\sup_{x\in S}\sum_{x\in T}\sup_{\eta\in\mathscr{S}} c_T(\eta, E^T) < +\infty$$

的时候，(7.7)右边级数一致收敛到 $C_b(\mathscr{S})$中函数，并有

$$|||\mathscr{A}f||| \leqslant \sup_{x\in S}\sum_{\substack{x\in T \\ T\text{有限}}}\sup_{\eta\in\mathscr{S}} c_T(\eta, E^T)\, |||f|||.$$

类似于第六章中所述的由形式生成元构造半群，进而构造过程的程序，我们可由 $\mathscr{A}$ 的定义(7.7)去构造过程. 这里不再详细讨论，可参见[L]Ch. 1. 3.

无穷粒子系的有趣结果往往都是结合具体情况，对特殊的速度函数 $c(\eta,\mathrm{d}\zeta)$而得到的，所以我们给出几个重要的具体模型.

2. 一些重要的具体模型

1) Ising 模型(无外力情形)

这是最早引起广泛注意的无穷粒子系模型. 其中 $S=\mathbf{Z}^d$, $E=$

$\{-1,1\}$，而且 $c_T(\eta,\cdot)=0$，当 $|T|\geqslant 2$. 此即例 3 中的情况. 进而再假定

$$c_{\{x\}}(\eta,-\eta(x)) = e^{\beta\sum\limits_{|y-x|=1}\eta(x)\eta(y)}.$$

这里 β 是系统的非负参数，在铁磁粒子系中它由系统的温度决定(与绝对温度的倒数成比例). 可以看出当位置 x 的极向与其邻域中各点都相反，则极向翻转的概率大. 这意味着系统具有取一致极向的倾向. 特别当 $\beta=0$，则系统是无相互作用的，即各格点处的粒子相互独立，所以当 $t\to+\infty$，系统有唯一的极限分布，它是 $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 的可列($\mathbf{Z}^d$) 乘积测度，也即 $\xi_\cdot$ 是遍历的.

对 Ising 模型，首要的问题是确定对什么样的 $\beta,d,\xi_\cdot$ 是遍历的. 事实上，当 $d=1,\beta\geqslant 0,\xi_\cdot$ 永远遍历；当 $d\geqslant 2$，存在一个临界值 β_d，使当 $\beta<\beta_d,\xi$ 遍历；而当 $\beta>\beta_d$，则不遍历，它有多个不变测度，这正是相变现象. 不同的不变测度对应于统计物理中不同的相.

2) 表决模型(Voter Model)

这里 $\mathscr{S}=\{0,1\}^{Z^d}$. 当 $|T|\geqslant 2$ 时，$c_T(\eta,\cdot)=0$，而且

$$c_{\{x\}}(\eta,{}_x\eta) \triangleq c(\eta,x) = \frac{1}{2d}\sum_{|y-x|=1} 1_{\{\eta(y)\neq\eta(x)\}}.$$

其实这里 $c(\eta,x)$等于 x 的邻域中与 $\eta(x)$不同的点数在邻域中总点数中的百分比.

易见这个系统中有两个显然的退化不变测度：$\gamma_1=\delta_{\{\underline{0}\}},\gamma_2=\delta_{\{\underline{1}\}}$，其中 $\delta_{\{x\}}$表示全部测度集中于 x 这一点；$\underline{0}$ 表示 $\eta(x)\equiv 0$，$\underline{1}$表示 $\eta(x)\equiv 1(x\in\mathbf{Z}^d)$. 研究这个系统的首要问题是：是否还有其它的不变测度？答案是：当 $d\leqslant 2$ 时，没有；当 $d\geqslant 3$ 时，有. 如果将 $\xi_t(x)$看成是时刻 t 在 x 格点位置上的人的意见，这就意味着在 $d\leqslant 2$时，当 $t\to+\infty$，意见必将归于一致；而当 $d\geqslant 3$ 时，则投票人可能不确定地坚持不同意见.

3）传染模型

这里 $\mathscr{S}=\{0,1\}^{Z^d}$，$|T|\geqslant 2$ 时，$c_T(\eta,\cdot)\equiv 0$，而且

$$c_{\{x\}}(\eta,{}_x\eta)=\begin{cases}1, & \eta(x)=1;\\ \lambda\sum\limits_{|y-x|=1}\eta(y), & \eta(x)=0.\end{cases}$$

这个模型是说，x 处的人如已染病（$\eta(x)=1$），则在过参数为 1 的指数时间后复原；而未染病者以正比于周围染病人数的机会可能染上病. 这里有一个平凡的不变测度：$\gamma=\delta_{\{0\}}$，即一开始若无人有病，则永远无人有病. 而当 $\lambda=0$ 意味着不传染，也就没有其它不变测度. 问题是：$\lambda>0$ 时，是否有其它不变测度？如同前面几例，可以证明存在一个临界值 λ_d，使当 $\lambda\leqslant\lambda_d$ 时，不变测度唯一；当 $\lambda>\lambda_d$ 时，不变测度不唯一. 这里对临界值 λ_d 的估计对传染病学研究有重要意义.

4）排它模型

这个模型对格点问题的研究有重要意义. 考虑无穷个粒子在 d-维格点 $\boldsymbol{Z}^d$ 上运动，每点最多只能有一个粒子，每个粒子按如下规则运动：

i）每个无穷小时间最多只有一个粒子运动；

ii）如果 y 处是空的，在 x 位置的粒子以 $p(x,y)$ 的概率跳到 y 去；如果 y 处已被占，则它停在原处 x.

这样就纳入了上节的模型，$\mathscr{S}=\{0,1\}^{Z^d}$，$|T|>3$，$c_T(\eta,\mathrm{d}\xi)=0$；$|T|\leqslant 2$，

$$c_{\{x,y\}}(\eta,\{\zeta\})=\begin{cases}p(x,y), & \text{当 } \eta(x)=1,\eta(y)=0,\zeta={}_{xy}\eta;\\ 0, & \text{其它 } \eta\neq\zeta \text{ 的情况}.\end{cases}$$

其中 $\sum\limits_y p(x,y)=1$，$({}_{xy}\eta)(u)=\begin{cases}\eta(x), & \text{当 } u=y;\\ \eta(y), & \text{当 } u=x.\\ \eta(u), & \text{当 } u\neq x,y\end{cases}$

对这个系统，在 $p(x,y)=p(y,x)$（$\forall\ x,y\in\boldsymbol{Z}^d$）条件下已经认识得相当清楚，但在其它情况下，则相应地有大量有兴趣的问题尚

待解决.

5) X-Y 模型

设 $S=\mathbf{Z}^2(d=2)$, $E=S^1$(单位圆圈). 当 $|T|\geqslant 2$ 时,令 $c_T(\eta,0)\equiv 0$;当 $|T|=1$ 时(设 $T=\{x\}$, $x\in S$),对可测集 $A\subset E$,令

$$c_T(\eta,A)=\exp\Big(-\beta\sum_{|x-y|=1}\cos(\eta(x)-\eta(y))\Big)\int_{A\cap[0,2\pi]}\mathrm{d}\zeta,$$

其中 $\mathrm{d}\zeta$ 是 S^1 上的 Lebesgue 测度, $\beta>0$. 记 $\eta_x^\zeta=(\eta_x^\zeta(y); y\in S)$,

$$\eta_x^\zeta(y)=\begin{cases}\eta(y), & y\neq x;\\ \zeta, & y=x.\end{cases}$$

则形式生成元为

$$\mathscr{A}f(\eta)=\sum_{x\in S}\exp\Big(-\beta\sum_{|x-y|=1}\cos(\eta(x)-\eta(y))\Big)\times\int_0^{2\pi}(f(\eta_x^\zeta)-f(\eta))\mathrm{d}\zeta.$$

模型 1)~5)还可以有更广的形式,即所谓 **Hamilton** 系统,这时 E 是具有群结构的空间, $S=\mathbf{Z}^d$,

$$c_T(\eta,A)=\int_A \mathrm{e}^{-\mathscr{H}_T(\eta,\zeta)}\prod_{y\in T}\nu(\mathrm{d}\zeta,y),$$

其中 $\prod_{y\in T}\nu(\mathrm{d}\zeta,y)$ 表示 $\nu(\mathrm{d}\zeta,y)$ 的乘积测度, $\nu(\mathrm{d}\zeta,y)$ 是 E 上的一个测度. $\mathscr{H}_T(\eta,\cdot)$ 与 $\nu(\mathrm{d}\zeta,y)$ 由 $\mathscr{S}=E^S$ 上的某个 Hamilton 函数 $\mathscr{H}(\eta)$ 决定. 这就是所谓的 Gibbs 场的理论. 由于 Hamilton 函数在物理或力学系统中是非常明确的,所以通常人们希望从它出发来建立模型. 于是由 $\mathscr{H}(\eta)$ 去决定 $c_T(\eta,\cdot)$ 就成为一个基本问题. 这方面读者可参考[P],[Ge],[Si] 等专著.

§2 渗流问题与随机介质的概率模型

1. 渗流问题模型

早在五十年代,对于流体在疏松介质中渗透就提出了这一问

题. 至今，渗流不仅在随机介质的研究中有了大量应用，而且也由此提出了许多有兴趣的数学问题.

首先，让我们给出最简单的渗流模型.

例 4（独立齐次 d-维格子的边渗流模型） 考虑 $\mathbf{Z}^d$ 的全部边，即全部 $\mathbf{Z}^d$ 中的紧邻的点对

$$B^d \triangleq \{(x_1, x_2); x_i \in \mathbf{Z}^d, |x_1 - x_2| = 1\}.$$

设有相互独立同分布的随机变量族 $\{\xi_b; b \in B^d\}$，其中

$$P(\xi_b = 1) = p, P(\xi_b = 0) = 1 - p \ (0 \leqslant p \leqslant 1).$$

我们如果把 $\xi_b = 1$ 看成是边 b 开放，$\xi_b = 0$ 是边 b 关闭，渗流的一个重要问题是从某点（例如原点 O）出发，能否以正概率找到一条通路到达无穷（在物理上，此时认为可渗透）. 较形式地，记

$$c(0) \triangleq \{x \in \mathbf{Z}^d; \exists\ n \geqslant 0, \text{及 } x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1} = x \text{ 使得}$$
$$|x_i - x_{i+1}| = 1, \text{而且 } \xi_{(x_i, x_{i+1})}(\omega) = 1,$$
$$\text{对 } 0 \leqslant i \leqslant n \text{ 成立}\},$$

$$p_\infty(p) \triangleq P(|c(0)| = +\infty) \ (|c(0)| \text{ 指 } c(0) \text{ 中元素个数}).$$

显然，$p_\infty(p)$ 对 p 递增，当 $p = 0$ 时，$p_\infty(p) = 0$；当 $p = 1$ 时，$p_\infty(p) = 1$. 问题是对 $0 < p < 1$，p_∞ 是否大于零. 令

$$p_c = \inf\{p \geqslant 0; p_\infty(p) > 0\}.$$

于是，当 $p < p_c$，$p_\infty(p) = 0$；当 $p > p_c$，$p_\infty(p) > 0$.

下面我们列举一些已经得证的事实，以便读者对这一领域中考虑的问题有一点感性认识.

1） $0 < p_c < 1$；

2） 当 $d = 2$，$p_\infty(p)$ 在 p_c 点连续，而且 $p_\infty(p_c) = 0$ (Russo).

又令

$$\pi_c \triangleq \sup\{p; 0 < p < 1, E(|c(0)|) < +\infty\}.$$

对 π_c 的性质又有一系列结果. 例如

3） $d = 2$ 时，$\pi_c = p_c$ (Kesten).

在这个领域中还有大量有趣而具有挑战性的问题尚待解决，

我们在此不一一列举了.

2. 随机介质问题

在1段中，各个边的开与闭并不一定要是相互独立的. 例如§1中的Ising模型提供的随机开闭边，也同样有渗流问题. 此外还可以将"开"与"闭"推广为每边具有随机阻尼ξ_ρ(以$\rho(dx)$为分布的随机变量)的情况. 这时，类似于前面，下面这些问题都是有趣的问题：从原点O是否能在有限时间达到$+\infty$；由原点出发，第一个坐标首次超过n的时间$t_{0,n}$怎样随n增大；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_{0,n}}{n}$是否存在；….

关于渗流与随机介质，读者可参考[Ch]，[D$_1$]，[Ge]的著作.

§3 点过程模型

1. 点过程的概念

最简单的点过程是Poisson点过程，第一章与第四章中，我们已经看到Poisson过程是一个马氏过程. 但是我们可以从另一个角度来认识它，并加以推广，得到另一类常见的随机过程——点过程.

设$\xi\triangleq\{\xi_t;t\geqslant 0\}$是一个Poisson过程. 令$t_0(\omega)=0$，$t_n(\omega)$是$\xi.$的第$n$次跳跃时刻. 于是$\{t_n(\omega);n=0,1,\cdots\}$是一列停时，而且

$$\xi_t(\omega)=n\quad(\text{当 } t_n(\omega)\leqslant t<t_{n+1}(\omega)\text{ 时}),$$

也即$\xi.$是以$\{t_n(\omega);n=0,1,\cdots\}$为跳跃点的阶梯函数，跃度均为1，同时

$$P(\omega;t_n(\omega)\leqslant t)=P(\omega;\xi_t(\omega)\geqslant n)=\sum_{k=0}^{n}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

再令$\nu(t)\triangleq\#\{n\geqslant 1;t_n(\omega)\leqslant t\}$($\# A$表示$A$中元素个数)，它表示在$(0,t]$中$\xi.$的跳跃次数. 其实$\nu(t)=\xi_t$，$\nu(t)\uparrow$(当$t\uparrow$)，因而它对

应一个测度 $\nu(\mathrm{d}t)$，称为计数测度.

对 Poisson 过程从这个角度去观察，使我们可以考虑更一般的情形，即 $t_n(\omega)$时刻的跃度可以是一个随机变量 u_n，于是计数测度应为

$$\nu(t,A) = \#\{n \geqslant 1; (t_n(\omega), u_n(\omega)) \in (0,t] \times A\}.$$

下面我们给出点过程的严格定义.

定义 7.1 在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上有映射

$$\pi: \Omega \to \Pi \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots \\ u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots \end{bmatrix}; t_i \in (0, +\infty), u_i \in \mathscr{S} \right\},$$

其中 $(\mathscr{S}, \Sigma)$ 是某一个可测空间. 令

$$\nu(t,A) \triangleq \#\{n; (t_n, u_n) \in (0,t] \times A\} \quad (t > 0, A \in \Sigma).$$

称 π 为一个点过程，如果对 $\forall\ A \in \Sigma$, $\{\nu(t,A); t \geqslant 0\}$ 对 $\mathscr{F}$ 可测. 特别，当 $\nu(t, \cdot)$ 是 σ- 有限测度，则也称为 σ- 有限点过程.

在很宽的条件下，存在随机测度 $\pi(t,A)$，使$(\nu(t,A))^2 - \pi(t,A)$为鞅，$\pi(t,A)$称为点过程的补偿测度.

例 5(一般 Poisson 点过程) 点过程 π 称为 Poisson 点过程，如果

1) $\exists\ \mathscr{B}((0,+\infty)\times\mathscr{S})$上的测度 $\lambda(\cdot)$，使得 $\nu((s,t]\times A)$ 服从以 $\lambda((s,t]\times A)$为强度参数的 Poisson 分布(当 $\lambda(D)=+\infty$，定义 $\nu(D)=+\infty$). 这时称 $\lambda(\cdot)$为强度测度；

2) 设 $D_1, \cdots, D_k \in \mathscr{B}((0,\infty)\times\mathscr{S})$，而且互不相交，则$\nu(D_1)$, $\cdots$, $\nu(D_k)$相互独立.

事实上，由 Poisson 过程所得的点过程，其强度测度为

$$\lambda((s,t] \times A) = \lambda_0(t-s)\delta_A(1),$$

即 $\lambda(\cdot)$是 Lebesgue 测度与集中于 1 的点测度之乘积. Poisson 点过程的强度测度正好就是它的补偿测度.

例 6(随机化的 Poisson 过程) 设

$$\nu((0,t] \times A) = \xi_t(\lambda(\omega), \omega)\delta_A(1),$$

其中 $\xi^\lambda \triangleq \{\xi_t(\lambda, \omega)\}$是以 λ 为参数的 Poisson 过程，当 $\lambda(\omega)$是与

$\{\xi^\lambda;\lambda\geqslant 0\}$相互独立的非负随机变量时，则对 $\xi_t(\omega)\triangleq\nu((0,t]\times A)$ 有

$$E(f(\xi_{t_1}(\omega),\cdots,\xi_{t_n}(\omega))\mid\lambda(\omega)=\lambda_0)$$
$$=E(f(\xi_{t_1}(\lambda_0,\omega),\cdots,\xi_{t_n}(\lambda_0,\omega))).$$

一般地，我们称满足上式的过程为随机化的 Poisson 过程. 也即 ξ 对于 $\lambda(\omega)$ 的条件分布与以 $\lambda(\omega)$ 为参数的 Poisson 过程的分布相同.

例 7(复合 Poisson 过程)　设 η_t 为 Poisson 过程，$\{X_n\}$ 为与 $\{\eta_t:t\geqslant 0\}$ 相互独立的非负独立同分布列，其分布函数为 F. 令

$$\xi_t=X_1+\cdots+X_{\eta_t},$$

则 ξ_t 在不连续点处的时间及跃度是一个点过程(ξ_t 称为复合 Poisson 点过程)，其补偿测度为 $\pi(t,A)=\lambda tF(A)$，其中 λ 是 η_t 的强度参数.

2. 点过程的应用与推广

以下二定理，可以使我们对研究点过程的意义有一点概念.

定理 7.1　取值于 $D([0,+\infty)\to\boldsymbol{R}^d)$ 的适应过程的不连续点及在相应点的跃度是一个点过程.

定理 7.2　以 $D([0,+\infty)\to\boldsymbol{R}^d)$ 为轨道空间的随机连续独立增量过程(称为 Levy 过程)的不连续点及在相应点的跃度是一个 Poisson 点过程.

以上二定理的证明可参见[G].

由此二定理可见，点过程对于用简单过程表示具有跳跃的过程(例如积分)具有重要意义.

此外，点过程在描述 BM^d，扩散过程等从某一点出发的游弋(excursion)及其与原过程的关系等问题时也是很有用的工具.

点过程的另一类重要应用是在生存分析、可靠性理论与排队论中. 点过程能很好地描述电话呼唤流、服务需求流、服务完成流、

事故发生流……等这些应用问题中最常见的随机过程.早在五十年代 Khinchin 在《公用事业数学理论》一书中,就已使用 Poisson 过程来描述呼唤流.

在处理随机几何问题中,点过程的想法也很有启发性.为此,Kallenberg 等将点过程的概念加以推广,引出了"随机测度"的概念.为此将 T 及 ν 一般化,即考虑一个完全可分度量空间 T,而将 T 的开集生成的 σ-代数记为 ρ_0,这意味着"流"不一定是"一串串"地来,可以不可数,因而相应的计数测度就应由整值测度推广为 ρ_0 中的一般非负测度.但是由于 ρ_0 中集合的测度可能无限,所以我们改为考虑 ρ_0 中的相对紧集类 ρ 上的有限测度(Radon 测度).于是仿定义 7.1,我们给出以下随机测度的定义.设跃度空间依然为$(\mathscr{S},\Sigma)$.

定义 7.2 给定概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$.记

$$\mathscr{M}\triangleq\{\mu;\mu\text{ 是 }\rho_0\times\Sigma\text{ 上的 }\sigma\text{- 有限测度}\}.$$

设有映射 $\nu:\Omega\to\mathscr{M}$,使得对$\forall\ K\in\rho$ 及 $A\in\Sigma$,$\nu(K\times A)$都对 $\mathscr{F}$ 可测,则称 ν 是一个随机测度.

关于用点过程去表示其它过程及它与半鞅的关系问题读者可进一步参考[G]的有关章节.关于点过程在已知某些联合分布时的构造问题、收敛性及一些特殊的点过程的研究可参考[DV],[Sn]与[Dai].关于随机测度可参考[Ka].

第八章　扩散过程与随机分析初步

§1　扩散过程及其生成元

1. 古典扩散模型与例子

首先，让我们考虑取值于 $\boldsymbol{R}^d$ 中的时齐马氏过程 ξ，设它的转移函数是 $\{P(t;x,A)\}$. 又设对任给 $\varepsilon>0$，

$$\psi_\varepsilon(t) \triangleq \sup_{x\in\boldsymbol{R}^d} P(t;x,\Gamma'(x,\varepsilon)) = o(t) \quad (\text{当 } t\to 0),$$

其中 $\Gamma'(x,\varepsilon)=\{y\in\boldsymbol{R}^d;|y-x|\geqslant\varepsilon\}$. 于是由定理 6.18，$\xi$ 可在连续函数空间上实现，也即我们可以认为 ξ 的轨道都是连续的.

再假设

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_{|y-x|\leqslant 1}(y-x)P(t;x,\mathrm{d}y) = \boldsymbol{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_d(x) \end{pmatrix},$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_{|y-x|\leqslant 1}(y-x)(y-x)^T P(t;x,\mathrm{d}y) = \boldsymbol{A}(x) = (a_{ij}),$$

其中 $\boldsymbol{b}(x)$ 是一个列向量，$\boldsymbol{A}(x)$ 是一个 $d\times d$ 函数方阵. 显然 $\boldsymbol{A}(x)$ 是非负定的.

设 $\{P_t\}$ 是 ξ 的半群：

$$P_t f(x) = \int_{\boldsymbol{R}^d} P(t;x,\mathrm{d}y)f(y).$$

称 $\{P_t\}$ 的**形式无穷小生成元**为 $\hat{\mathscr{A}}$，若对 $f\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^d)$，

$$(\hat{\mathscr{A}} f)(x) \triangleq \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int P(t;x,\mathrm{d}y)(f(y)-f(x)).$$

其中右端极限是指对 $\forall$ 固定的 $x\in\boldsymbol{R}^d$ 存在.

命题 8.1　在前面的假定下，又若 $a_{ij}(x)$ 局部有限，则 $\{P_t\}$ 的

形式无穷小生成元 $\hat{\mathscr{A}}$ 应为

$$(\hat{\mathscr{A}}f)(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)+\sum_{i=1}^{d}b_i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}. \tag{8.1}$$

证明 考察

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}\int P(t;x,\mathrm{d}y)(f(y)-f(x))\\&=\frac{1}{t}\int_{|x-y|>1}P(t;x,\mathrm{d}y)(f(y)-f(x))\\&\quad+\frac{1}{t}\int_{|x-y|\leqslant 1}P(t;x,\mathrm{d}y)(f(y)-f(x)),\end{aligned}$$

其中第一项不超过 $2\|f\|\frac{\psi_1(t)}{t}\to 0(t\downarrow 0)$，然而第二项可 Taylor 展开为三项：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}\int_{|x-y|\leqslant 1}P(t;x,\mathrm{d}y)(f(y)-f(x))\\&=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{t}\int_{|x-y|\leqslant 1}P(t;x,\mathrm{d}y)(x_i-y_i)(x_j-y_j)\\&\quad+\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\frac{1}{t}\int_{|x-y|\leqslant 1}P(t;x,\mathrm{d}y)(y_i-x_i)\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{1}{t}\int_{|x-y|\leqslant 1}P(t;x,\mathrm{d}y)(x_i-y_i)(x_j-y_j)\\&\quad\times\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{x}^{x+\theta(y-x)}\\&\triangleq \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III},\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{I}\to\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}a_{ij}(x)\quad(\text{当 } t\downarrow 0);$$

$$\mathrm{II}\to\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}b_i(x)\quad(\text{当 } t\downarrow 0).$$

因为对固定的 x，f 的二阶导数在 $\{y;|y-x|\leqslant 1\}$ 上有界且连续，所以，对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当 $|x-z|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_x^z\right|<\varepsilon,$$

于是

$$\begin{aligned}
|\mathrm{III}| \leqslant & \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{1}{t}\int_{|x-y|\leqslant\delta}[(x_i-y_i)^2+(x_j-y_j)^2]p(t;x,\mathrm{d}y)\varepsilon \\
& +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{1}{t}\int_{|x-y|>\delta}P(t;x,\mathrm{d}y)M \\
\leqslant & \varepsilon d\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{t}\int_{|x-y|<\delta}(x_i-y_i)^2P(t;x,\mathrm{d}y)+\frac{Md^2}{2t}\psi_\delta(t) \\
\to & \varepsilon d\sum_{i=1}^{d}a_{ii}(x)\quad (\text{当 } t\downarrow 0),
\end{aligned}$$

其中 M 是 $\max\limits_{i,j}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right|$ 在 $|x-y|\leqslant 1$ 上的界. 由于 ε 是任意的，所以 $\lim\limits_{t\downarrow 0}\mathrm{III}=0$. 于是(8.1)得证. ▌

具有上面这样性质的一个 $\boldsymbol{R}^d$ 上的马氏过程，就称为一个以 $A(x)\triangleq(a_{ij}(x))$ 为**扩散系数**，以 $\boldsymbol{b}(x)\triangleq(b_i(x))$ 为**漂移系数**的古典扩散过程.

例 1 设有 $\boldsymbol{R}^d$ 中的动力体系

$$\begin{cases}\dot{\xi}=b(\xi),\\ \xi_0=x.\end{cases}$$

它的解 $\xi=\xi_t(x)$ 满足 $\xi_0=x$，$\frac{\mathrm{d}\xi_t}{\mathrm{d}t}=b(\xi_t)$. 这样的解 ξ 也可以看成一个退化了的古典扩散过程：

$$P(t;x,B)=1_B(\xi_t(x)).$$

它对应的半群是

$$P_tf(x)=\int P(t;x,\mathrm{d}y)f(y)=f(\xi_t(x)),$$

于是它的形式无穷小生成元是

$$\hat{\mathscr{A}}f(x) = \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad (x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)).$$

而事实上,此时一切一阶连续可导的函数 $f \in \mathscr{D}(\hat{\mathscr{A}})$.

例 2 设 $\{\mathscr{B}_t; t \in \boldsymbol{R}^+\}$ 是 Brown 运动,则它是古典扩散过程.而且它的形式无穷小生成元为 $\hat{\mathscr{A}} = \frac{1}{2}\Delta$.

事实上,我们有

$$P(t; x, \Gamma(x,\varepsilon)) = \int_{|x-y|\geqslant \varepsilon} \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} dy$$

$$\leqslant \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{|z|\geqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} dz$$

$$= o(t) \quad (\text{利用 L'Hospital 法则});$$

$$\frac{1}{t}\int_{|x-y|\leqslant 1} (x-y) P(t; x, dy) \equiv 0.$$

当 $i \neq j$ 时,

$$\left| \frac{1}{t}\int_{|x-y|\leqslant 1} \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} (x_i - y_i)(x_j - y_j) dy \right|$$

$$= \left| \int_{|z|\leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} z_i z_j dz \right|$$

$$\to 0 \quad (\text{当 } t \downarrow 0) \left(z_i = \frac{x_i - y_i}{\sqrt{t}} \right),$$

所以

$$\frac{1}{t}\int_{|x-y|\leqslant 1} \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} (x_i - y_i)(x_j - y_j) dy \to \delta_{ij},$$

于是由命题 8.1,对 $f \in C_0^2$,有 $\hat{\mathscr{A}} f = \frac{1}{2}\Delta f$.

例 3 吸附(停止)、反射、截止(斩杀)Brown 运动.

设 $\{B_t; t \in \boldsymbol{R}^+\}$ 是一个一维 Brown 运动.令

$$\tau = \inf\{t > 0; B_t \leqslant 0\},$$

$$\xi_t = B_{t\wedge\tau}; \quad \eta_t = |B_t|;$$

$$\zeta_t = B_t 1_{\{\tau>t\}} + \partial 1_{\{\tau\leqslant t\}}$$ （其中 ∂ 称为"死点"）.

过程 $\xi \triangleq \{\xi_t; t \geqslant 0\}$，$\eta \triangleq \{\eta_t; t \geqslant 0\}$ 与 $\zeta \triangleq \{\zeta_t; t \geqslant 0\}$ 分别称为吸附（停止）、反射与截止（斩杀）Brown 运动.

对 $\widetilde{B}_t \triangleq x - B_t$ 应用反射原理及其推论（§5.3 定理 5.17，5.18 及推论），我们立即得到对于 $y \geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}
&P_x(B_t \geqslant y, \tau > t) \\
&\quad = P(B_t \geqslant y \mid B_0 = x) - P(B_t \geqslant y, \tau \leqslant t \mid B_0 = x) \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_y^{\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{2t}} dz - P(\widetilde{B}_t < x - y, (\widetilde{B})_t^* \geqslant x \mid \widetilde{B}_0 = 0) \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\int_y^{\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{2t}} dz - \int_{x+y}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2t}} dz \right) \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_y^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-z)^2}{2t}} - e^{-\frac{(x+z)^2}{2t}} \right) dz,
\end{aligned}$$

于是就得到 ξ, η, ζ 的转移函数分别为：

$$\begin{aligned}
&P(\zeta_t \in \Gamma \mid \zeta_0 = x) \\
&\quad = P(B_t \in \Gamma, \tau > t \mid B_0 = x) \quad (\Gamma \subset (0, +\infty)) \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\Gamma} \left(e^{-\frac{(x-z)^2}{2t}} - e^{-\frac{(x+z)^2}{2t}} \right) dz;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P(\xi_t \in \Gamma \mid \xi_0 = x) \\
&\quad = P(B_{t\wedge\tau} \in \Gamma \mid B_0 = x) \\
&\quad = P(B_t \in \Gamma, \tau > t \mid B_0 = x) + P(\tau \leqslant t \mid B_0 = x) 1_{\Gamma}(\partial) \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\Gamma} \left(e^{-\frac{(x-z)^2}{2t}} - e^{-\frac{(x+z)^2}{2t}} \right) dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{x e^{-\frac{x^2}{2s}}}{s^{3/2}} ds\, 1_{\Gamma}(\partial);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P(\eta_t \in \Gamma \mid \eta_0 = x) \\
&\quad = \frac{1}{2} [P(|B_t| \in \Gamma \mid B_0 = x) + P(|B_t| \in \Gamma \mid B_0 = -x)] \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\Gamma} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} + e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} \right) dy.
\end{aligned}$$

类似于 Brown 运动的相应计算方法，我们容易算出以上三个

过程的扩散系数均为 1，漂移系数均为 0（对 $x>0$），即它们有相同的形式生成元. 然而，它们有不同的无穷小生成元，不同处就在于定义域不一样.

事实上，由于对 f 总假定 $f(\partial)=0$，于是

$$E(f(\zeta_t)|\zeta_0 = x)= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{2t}} \right) f(y)\mathrm{d}y$$

$$\to 0 \quad (\text{当 } x \downarrow 0),$$

可见 ζ 的对应半群 $\{p_t^{\zeta}f(x)=E(f(\zeta_t)|\zeta_0=x)\}$ 的强连续中心中的函数应满足

$$f(0+) = 0. \tag{8.2}$$

又由于

$$P_t^{\xi}f(0) = E(f(\xi_t)|\xi_0 = 0) = E(f(B_{t\wedge\tau})|B_0 = 0)$$
$$\to E(f(0)|B_0 = 0) = f(0) \quad (t \downarrow 0),$$

可见，对 $f\in\mathscr{D}(\mathscr{A}^{\xi})$ 应有 $\mathscr{A}^{\xi}f(0)=0$. 特别当 f 又是二阶连续可导时，

$$\frac{1}{2}f''(0+) = 0. \tag{8.3}$$

对于过程 η，我们有

$$\frac{\partial P_t^{\eta}f(x)}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^{\infty}\left[(x-y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} + (x+y)e^{-\frac{(x+y)^2}{2t}} \right] f(y)\mathrm{d}y$$

$$\to 0 \quad (\text{当 } x \downarrow 0 \text{ 时}),$$

对于 $\forall f\in\mathscr{D}(\mathscr{A}^{\eta})$，由(6.2)有表达式

$$f = P_t^{\eta}f - \int_0^t P_s^{\eta}\mathscr{A}f\mathrm{d}s.$$

可见 f 应满足条件

$$f'(0+) = 0. \tag{8.4}$$

条件(8.2)，(8.3)，(8.4)正好反映了过程在到达边界点 0 后的行为.

设 C_u^2 是二阶导数一致连续且有界的函数类. 可以证明：函数

集合

$$\left\{f\in C_u^2(\boldsymbol{R}^+); \frac{1}{2}f''(0+)=0\right\},\quad \{f\in C_u^2(\boldsymbol{R}^+); f'(0+)=0\},$$

及

$$\{f\in C_u^2(\boldsymbol{R}^+); f(0+)=0\}$$

恰好分别是 ξ,η 及 ζ 三个过程所对应半群的无穷小生成元的定义域的一个稠子集，因而由生成元的形式微分算子 $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ 与边值条件(8.2)，(8.3)，(8.4)就可以确定对应的半群. 当然，确定的过程中还有一些技术性的问题，这里我们不再详细讨论.

2. 扩散过程

在实际问题中，往往与我们在第1段中考虑问题的途径相反. 通常，经过物理的或对具体情况的分析，可以得到扩散系数 $\boldsymbol{A}$ 与漂移系数 $\boldsymbol{b}$；问题的焦点在于：是否能对给定的 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{b}$，存在唯一的转移函数族 $\{P(t;x,A)\}$，并由此能产生一个取值于 $\boldsymbol{R}^d$ 中的轨道连续的强马氏过程 ξ，使得 ξ 恰具有以 $\boldsymbol{A}$ 为扩散系数 $\boldsymbol{b}$ 为漂移系数的形式生成元：

$$Lf(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_i b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}\quad (\text{对 } f\in C_0^\infty),$$

其中 $\qquad C_0^\infty \triangleq \{\text{无穷可微紧支集函数全体}\})$，

而且 $C_0^\infty\subset\mathscr{D}(\mathscr{A})$，对 $f\in C_0^\infty$，我们有 $\mathscr{A}f=Lf$. 如果这样的马氏过程存在，就称之为以 $\boldsymbol{A}$ 为扩散系数，以 $\boldsymbol{b}$ 为漂移系数的扩散过程.

应该指出，不同的著作者对扩散给出了不同的定义，虽则它们大体上相同，但却并不彼此等价；我们这里采用的是一种最常见而简单的说法（还有一种较为普遍的定义是：连续轨道的强马氏过程）.

扩散过程理论在物理、化学、生物、工程、经济等领域中有广泛的应用. 例如：分子运动、带噪声的通讯系统、有干扰的神经生理活动、生物膜中的渗透过程、进化过程中的基因更替、期货与期权定

价…等一系列研究中，扩散过程都是一个很好的近似模型.

此外，扩散过程理论也与微分方程的研究有密切的联系. 许多扩散过程的泛函，例如击中分布、平均吸收时间、占位时间分布、不变测度等等都是一些微分方程的边值或初值问题的解. 不仅扩散理论有时可以提供一些系数与边界要求较宽的微分方程解的存在性、唯一性条件，而且概率意义的直观也可以为微分方程的问题的合理提法提供启迪. 在微分方程的计算方面，Monte Carlo 方法就是用计算机模拟扩散过程，并以大量现实(轨道)的算术平均来近似过程的统计平均去求方程的解.

3. 扩散过程的纯分析构造方法

对给定的 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{b}$，有许多不同的途径去构造它们相应的扩散过程，它们各有自己的局限性与优点. 例如纯分析方法——利用微分方程的基本解——对系数光滑性要求较高，而且又要用到微分方程的冗长而又沉重的基本解定理，但是它的结果具体，并可导出前进、后退方程. 在本章的后半部分，我们将介绍纯概率构造方法——利用随机微分方程的方法. 本段，我们介绍纯分析构造方法，对于冗长而沉重的偏微分方程的基本解定理，由于它已大大超出本书的范围，我们只能引用而不作任何论证.

定理 8.2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}(x))$，$\boldsymbol{b}=(b_i(x))$具有以下性质：

(1) $|b_j(x)|\leqslant M$ 对$\forall\ x\in\boldsymbol{R}^d$，$j=1,2,\cdots,d$；

(2) 存在 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<+\infty$使对$\forall\ (\xi_1,\cdots,\xi_d)\in\boldsymbol{R}^d$ 有

$$\lambda_1\sum_i\xi_i^2\leqslant\sum_{i,j}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant\lambda_2\sum_j\xi_j^2;$$

(3) 存在 $\alpha>0$，$C<+\infty$，使对$\forall\ x,y\in\boldsymbol{R}^d$ 有

$$|a_{ij}(x)-a_{ij}(y)|\leqslant C|x-y|^\alpha,$$
$$|b_i(x)-b_i(y)|\leqslant C|x-y|^\alpha,$$
$$i,j=1,2,\cdots,d.$$

则存在唯一的函数 $p(t;x,y)$具有以下性质：

(Ⅰ) 对$\forall\ y\in\boldsymbol{R}^d$,

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{d}b_j(x)\frac{\partial p}{\partial x_j};$$

(Ⅱ) 对任意 $\boldsymbol{R}^d$ 上的连续有界函数 $f(x)$,

$$u(t,x)=\int p(t;x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

是以下偏微分方程的解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{d}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, & \text{(a)}\\ \lim\limits_{t\downarrow 0}u(t,x)=f(x); & \text{(b)}\end{cases}$$

(Ⅲ) $p(t;x,y)$对$(t,x,y)(t>0)$连续、非负,而且

$$\int p(t;x,y)\mathrm{d}y=1;$$

(Ⅳ) $\psi_\varepsilon(\delta)\triangleq\sup\limits_{\substack{x\in\boldsymbol{R}^d\\0\leqslant t\leqslant\delta}}\displaystyle\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}p(t;x,y)\mathrm{d}y=o(\delta)$ (当 $\delta\downarrow 0$).

(Ⅴ) $p(t;x,y)>0$,且由 $P_tf(x)\triangleq u(t,x)$决定的半群是强 Feller 半群.

本定理的(Ⅰ),(Ⅱ)及(Ⅲ)的前半部分的证明可参见 Friedman A.《Partial Differential Equations of Parabolic Type》,Englewood Cliffs,1964. 而(Ⅲ)的最后一部分及(Ⅳ)与(Ⅴ)的证明可参见[Dy].

值得特别指出的是:(Ⅰ),(Ⅱ)的(b)与(Ⅲ)就保证了 $p(t;x,y)$ 的唯一性. 由定理 8.2 保证了所得到的$\{p(t;x,y)\}$是一个转移函数族. 为此,只要说明$\{p(t;x,y)\}$满足 Kolmogorov 方程. 事实上,根据(Ⅱ),(Ⅲ)可见

$$u(t,x)\triangleq\int p(t;x,z)p(s;z,y)\mathrm{d}z$$

是满足(Ⅰ),(Ⅱ)的(b)与(Ⅲ)的,而 $p(s+t;x,y)$也满足同样条件,由唯一性得

$$p(s+t;x,y)=\int p(t;x,z)p(s;z,y)\mathrm{d}z.$$

由转移密度族$\{p(t;x,y)\}$可以构造概率测度空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及其上的马氏过程ξ，又由(Ⅳ)可见ξ可以在连续函数空间上实现．此时恒有$C_0^\infty\subset\mathscr{D}(\mathscr{A})$．

遗憾的是定理 8.2 要求的条件太强，它排斥了许多有趣的情况．甚至线性扩散也不满足它的条件．这是偏微分方程方法的不足处．为了补足这一方面，构造扩散过程还有半群方法及随机微分方程方法等．

4. 前进与后退方程

在上一段中我们已经看到，在一些条件下，一个扩散过程的转移密度应满足方程

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{d}b_i(x)\frac{\partial p(t;x,y)}{\partial x_i},\quad(8.5)$$

并且是上方程的基本解．

我们称方程(8.5)为 Kolmogorov 后退方程．

下面的定理 8.3 给出 Kolmogorov 前进方程(或称 Fokker-Plank 方程)成立的条件．

定理 8.3 设$\xi=(\xi_t,\mathscr{F}_t)$是$(\Omega,\mathscr{F},P)\to\boldsymbol{R}^d$的扩散过程，具有形式生成元

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{d}b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}.\quad(8.6)$$

又设

(1) ξ的生成元的定义域包含C_0^∞(即一切具有紧支集的无穷可导函数)；

(2) ξ具有转移密度$\{p(t;x,y)\}$，并且$p(t;x,y)$对t的一阶偏导数、对y的一阶、二阶偏导数都存在而且连续；b_i有一阶连续偏导数、$a_{ij}(y)$对y_i,y_j有一阶、二阶连续偏导数．

则如下的 Kolmogorov 前进方程成立：

$$\frac{\partial p}{\partial t} = L^* p,$$

其中 L^* 是 L 的形式共轭算子

$$L^* p = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(a_{ij}(y)p(t;x,y))$$

$$- \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial y_i}(b_i(y)p(t;x,y)).$$

证明 由于 $C_0^\infty \subset \mathscr{D}(\mathscr{A})$，可见对 $\forall f \in C_0^\infty$，应有

$$\mathscr{A} f = Lf = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

那么，由半群

$$P_t f(x) = \int p(t;x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

的性质应有

$$\frac{\mathrm{d}P_t f}{\mathrm{d}t} = \mathscr{A} P_t f = P_t \mathscr{A} f,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int p(t;x,y)f(y)\mathrm{d}y = \int p(t;x,y)Lf(y)\mathrm{d}y. \qquad (8.7)$$

由于 f 具有紧支集以及 $\frac{\partial p}{\partial t}$ 的连续性，按有界收敛定理，上式左边应为 $\int \frac{\partial p}{\partial t}(t;x,y)f(y)\mathrm{d}y$.

另一方面，对(8.7)式右端各项分别作分部积分，并注意到 f 在紧支集之外恒为 0，我们得到

$$\int p(t;x,y)b_i(y)\frac{\partial f(y)}{\partial y_i}\mathrm{d}y$$

$$= -\int \frac{\partial}{\partial y_i}(p(t;x,y)b_i(y))f(y)\mathrm{d}y,$$

$$\int p(t;x,y)a_{ij}(y)\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y_i \partial y_j}\mathrm{d}y$$

$$= -\int \frac{\partial}{\partial y_i}(p(t;x,y)a_{ij}(y))\frac{\partial f(y)}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$= \int \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(p(t;x,y)a_{ij}(y))f(y)\mathrm{d}y.$$

于是(8.7)就可改写为

$$\int \frac{\partial p}{\partial t}(t;x,y)f(y)\mathrm{d}y = \int L^* p(t;x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

由于对$\forall\ f\in C_0^\infty$ 上式均成立，可见

$$\frac{\partial p}{\partial t} = L^* p. \ \blacksquare$$

对于非时齐的扩散过程，也可类似地得到相应的前进、后退方程：

$$-\frac{\partial p(s,t;x,y)}{\partial s} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(s,x)\frac{\partial^2 p(s,t;x,y)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(s,x)\frac{\partial p(s,t;x,y)}{\partial x_i}\text{(后退方程)}, \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial p(s,t;x,y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(a_{ij}(t,y)p(s,t;x,y)) - \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial y_i}(b_i(t,y)p(s,t;x,y))\text{(前进方程)}. \quad (8.9)$$

当后退方程成立时，$p(s,t;x,y)$是方程

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(s,x)\frac{\partial^2 p(s,t;x,y)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(s,x)\frac{\partial p(s,t;x,y)}{\partial x_i}$$

的基本解.

5. 狄氏问题的概率表示

设有扩散过程$\{\xi_t,\mathscr{F}_t;t\in \boldsymbol{R}^+\}$，其形式生成元是非退化系数连续的二阶椭圆型微分算子：

$$\underset{\sim}{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

而且$C_0^2\subset\mathscr{D}(\mathscr{A})$. 那末我们有

定理 8.4 设一个相对紧开域 D(设 ∂D 光滑)上的狄氏问题

$$\begin{cases} Lv(x) = -g(x), & x \text{ 在 } D \text{ 内}; \\ v(x) = \varphi(x), & x \text{ 在 } \partial D \text{ 上} \end{cases} \tag{8.10}$$

具有直到边界(即 $\overline{D}$ 上)二阶连续可导的解 $v(x)$. 那末 $v(x)$ 有概率表示:

$$v(x) = E_x\left(\varphi(\xi_\tau) + \int_0^\tau g(\xi_u)\mathrm{d}u \right), \tag{8.11}$$

其中 $\tau=\inf\{t;\xi_t \overline{\in} D\}$.

证明 (1) 将 v 开拓到全空间成为一个 C_0^2 中函数,考察

$$\eta_t = v(\xi_t) - \int_0^t Lv(\xi_u)\mathrm{d}u.$$

由命题 6.6,$\{\eta_t,\mathscr{F}_t\}$是一个鞅,由停时定理

$$E_x(\eta_{t\wedge\tau}) = E_x\eta_0 = v(x),$$

即

$$v(x) = E_x\left(v(\xi_{t\wedge\tau}) - \int_0^{t\wedge\tau} Lv(\xi_u)\mathrm{d}u \right). \tag{8.12}$$

由于当 $t\leqslant\tau$ 时 $\xi_t\in\overline{D}$,而且 v,Lv 在紧集 $\overline{D}$ 上连续,因而有界.从而 $v(\xi_{t\wedge\tau})$有界,即存在常数 c 使得

$$\int_0^{t\wedge\tau} Lv(\xi_u)\mathrm{d}u \leqslant c\tau.$$

假若 $E_x\tau<+\infty$,我们在(8.12)中,令 $t\to+\infty$,由控制收敛定理就得到

$$v(x) = E_x\left(v(\xi_\tau) - \int_0^\tau Lv(\xi_u\mathrm{d}u) \right).$$

又由于 ξ_t 是连续的,因而 $\xi_\tau\in\partial D$,于是

$$v(x) = E_x\left(\varphi(\xi_\tau) + \int_0^\tau g(\xi_u)\mathrm{d}u \right).$$

(2) 证明 $E_x\tau<+\infty$. 由于 L 非退化,所以存在 $\alpha,R>0$ 使得

$$a_{11}(x) > \alpha > 0,\ \overline{D} \subset \{x;|x| < R\}.$$

令

$$v_1(x)=\mathrm{ch}\lambda R-\mathrm{ch}\lambda x_1\geqslant 0 \quad (\forall\ x\in\overline{D}).$$

于是 $$Lv_1(x)\leqslant -\frac{\lambda^2}{2}\alpha\mathrm{ch}\lambda x_1-\lambda b_1(x)\mathrm{sh}\lambda x_1.$$

取 $\lambda=\frac{4}{\alpha}\sup\limits_{x\in D}|b_1(x)|$,就可使

$$Lv_1(x)\leqslant \frac{-\lambda^2}{2}\alpha\mathrm{ch}\lambda x_1+\frac{\alpha}{4}\lambda^2\mathrm{sh}\lambda|x_1|\leqslant -\frac{\lambda^2}{4}\alpha\mathrm{ch}\lambda x_1\leqslant -\frac{\lambda^2}{4}\alpha.$$

注意到(8.12)也适用于 v_1 就得到

$$E_x\int_0^{t\wedge\tau}Lv_1(\xi_u)\mathrm{d}u=E_xv_1(\xi_{t\wedge\tau})-v_1(x).$$

因此

$$E_x(t\wedge\tau)\frac{\lambda^2\alpha}{4}\leqslant E\int_0^{t\wedge\tau}-Lv_1(\xi_u)\mathrm{d}u=v_1(x)-E_xv_1(\xi_{t\wedge\tau})\leqslant v_1(x).$$

由于 v_1 在 D 上有界,因而存在 C_1 使 $E_x(t\wedge\tau)<C_1(\forall\ x\in D)$. 令 $t\to+\infty$,由单调收敛定理

$$E_x\tau\leqslant C_1.\ \blacksquare$$

特别地,令 $\varphi=0$,就得到

$$v(x)=E_x\int_0^{\tau}g(\xi_u)\mathrm{d}u$$

是方程

$$\begin{cases}Lv=-g,\\ v|_\partial=0\end{cases}$$

的解(如果解存在并二阶连续可导到边界).

在(8.11)中取 $g=0$,就得到

$$v(x)=E_xf(\xi_\tau)$$

是方程

$$\begin{cases}Lv=0,\\ v|_\partial=f\end{cases}$$

的解(如果此解存在并二阶连续可微到边界).

本段的讨论是以微分方程狄氏问题解的存在性与直到边界的二阶连续可导性为前提的. 这似乎使人感到概率方法研究狄氏问题的效力并不好. 事实上,利用概率论自身的方法,可以独立地得

到结论：当 L 的系数满足一定的光滑性要求时，由条件期望定义的函数

$$v(x)=E_x\left\{f(\xi_\tau)+\int_0^\tau g(\xi_u)\mathrm{d}u\right\}$$

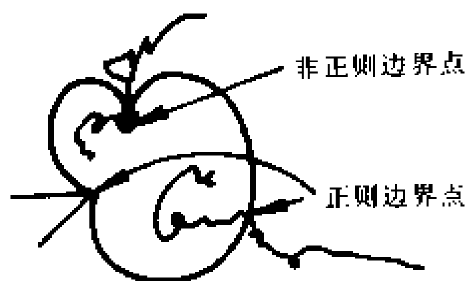
是方程(8.10)的 Sobolev 解，再由 Sobolev 嵌入定理进而说明它也是强解. D. Strook 与 S. R. S. Varadhan 在他们的一系列工作中(1971～1972)解决了这一问题，而且他们的研究还适用于微分算子是退化椭圆型的情况(参见[SV]).

至于 $u(t,x)$ 的边界性质，我们将在下段给予简单的介绍.

6. 边界性质

定义 8.1(正则边界点) 设 $\{\xi_t,\mathscr{F}_t\}$ 是一个轨道右连续的 Feller 过程. D 是一个相对紧开域. 令 $\tau=\inf\{t>0,\xi_t\overline{\in}\overline{D}\}$. 我们称 $x\in\partial D$ 是对 $\{\xi_t\}$ 的一个正则边界点，如果

$$P_x(\tau>0)=0,\ 即\ P_x(\tau=0)=1.$$



右图给出了这个定义的直观含义. 事实上，若存在一个以 x 为顶点的锥全不在 D 中，则 x 必为正则点.

命题 8.5 若 $P_x(\tau=0)>0$，则 $P_x(\tau=0)=1,P_x(\tau>0)=0$.

证明 由于

$$\{\omega;\tau=0\}=\{\omega;\exists\ t_n\downarrow 0,\xi_{t_n}\overline{\in}\overline{D}\}\in\bigcap_n\mathscr{F}_{\frac{1}{n}}=\mathscr{F}_{0+}.$$

由 Blumenthl 0-1 律(第六章习题 17)，我们就得到：$P_x(\tau=0)=0$ 或 1，于是 $P_x(\tau=0)=1$，即 $P_x(\tau>0)=0$. ▌

命题 8.6 对 Feller 过程 ξ，如果 x_0 是一个正则边界点，则对 $\forall\ h>0$ 有

$$\lim_{x\to x_0}P_x(\tau<h)=1.$$

证明 由于

$$P_{x_0}(\tau < h) \geqslant P_{x_0}(\tau = 0) = 1,$$

我们有

$$\begin{aligned} 1 &= P_{x_0}(\tau < h) = P_{x_0}(\exists\ t \in (0,h) \text{ 使 } \xi_t \overline{\in} \overline{D}) \\ &= P_{x_0}(\exists \text{ 有理数 } r, \text{使 } rh \in (0,h) \text{ 使 } \xi_{rh} \overline{\in} \overline{D}) \\ &= \lim_{n\to\infty} P_{x_0}(\exists\ 0 < k < 2^n, \text{使 } \xi_{\frac{kh}{2^n}} \overline{\in} \overline{D}). \end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$，$\exists\ n$，使 $P_{x_0}\left(\forall\ 0 < k < 2^n, \xi_{\frac{kh}{2^n}} \in \overline{D}\right) < \frac{\varepsilon}{3}$. 令

$$f_N(x) = e^{-N\rho(x,D)} \quad (\rho(x,D) \text{ 为 } x \text{ 到 } D \text{ 的距离}),$$

于是

$$f_N(x) \to 1_D(x) \quad (N \to \infty),$$

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} E_{x_0}\left(f_N\left(\xi_{\frac{h}{2^n}}\right) \cdots f_N\left(\xi_{\frac{2^n-1}{2^n}h}\right)\right) \\ &\qquad = P_{x_0}\left(\xi_{\frac{kh}{2^n}} \in \overline{D}; \forall\ 0 < k < 2^n\right) < \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

因而$\exists\ N$，使

$$E_{x_0}\left(f_N\left(\xi_{\frac{h}{2^n}}\right) \cdots f_N\left(\xi_{\frac{2^n-1}{2^n}h}\right)\right) < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

又由于$\{\xi_t\}$是 Feller 过程，所以对$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta$，当$|x - x_0| < \delta$ 时，

$$\left|E_x\left(f_N\left(\xi_{\frac{h}{2^n}}\right) \cdots f_N\left(\xi_{\frac{2^n-1}{2^n}h}\right)\right) - E_{x_0}\left(f_N\left(\xi_{\frac{h}{2^n}}\right) \cdots f_N\left(\xi_{\frac{2^n-1}{2^n}h}\right)\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是当$|x - x_0| < \delta$ 时，我们有

$$\begin{aligned} P_x(\tau \geqslant h) &\leqslant P_x\left(\xi_{\frac{kh}{2^n}} \in \overline{D}; \forall\ 0 < k < 2^n\right) \\ &\leqslant E_x\left(f_N\left(\xi_{\frac{h}{2^n}}\right) \cdots f_N\left(\xi_{\frac{2^n-1}{2^n}h}\right)\right) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + E_{x_0}\left(f_N\left(\xi_{\frac{h}{2^n}}\right) \cdots f_N\left(\xi_{\frac{2^n-1}{2^n}h}\right)\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

所以 $$P_x(\tau < h) > 1 - \varepsilon.$$

于是得到：

$$\lim_{x\to x_0} P_x(\tau < h) = 1. \ \blacksquare$$

定理 8.7 设$(\xi_t, \mathscr{F}_t)$为 Feller 过程，且是以 L 为形式生成元

的扩散过程. D 是一个相对紧开域,令

$$\tau = \inf\{t > 0, \xi_t \overline{\in} D\},$$

$$u(x) = E_x(\varphi(\xi_\tau)).$$

若 x_0 关于 $\{\xi_t\}$ 是 D 的正则边界点,则对任何有界连续函数 φ,有

$$u(x_0) = \lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0) \quad (x \in \overline{D}, x_0 \in \partial D).$$

证明 显然由 $x_0 \in \partial D$ 有

$$u(x_0) = E_{x_0}(\varphi(\xi_\tau)) = E_{x_0}(\varphi(\xi_0)) = \varphi(x_0).$$

另一方面,$\forall\ \varepsilon > 0$,$\exists\ \delta$ 使 $|y - x_0| < \delta$ 时,$|\varphi(y) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$,于是

$$|u(x) - \varphi(x_0)| = |E_x(\varphi(\xi_\tau) - \varphi(x_0))|$$
$$\leqslant E_x(|\varphi(\xi_\tau) - \varphi(x_0)| 1_{\{\tau < h\}}) + 2E_x(1_{\{\tau \geqslant h\}}) \|\varphi\|.$$

上式中第二项当 $x \to x_0$ 时趋于 0. 我们将第一项分为两项:令

$$A_h = \{\omega; |\xi_t - x_0| < \delta, \text{对}\ \forall\ t \in [0, h]\}.$$

于是

$$E_x(|\varphi(\xi_\tau) - \varphi(x_0)| 1_{\{\tau < h\}})$$
$$\leqslant E_x(|\varphi(\xi_\tau) - \varphi(x_0)| 1_{A_h}(\omega) 1_{\{\tau < h\}} + E_x(2\|\varphi\| 1_{A_h^c}(\omega))$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + 2\|\varphi\| P_x(A_h^c).$$

为了说明 $P_x(A_h^c) \to 0$(当 $h \downarrow 0$),我们注意对$\forall\ f \in C_0^2$,

$$M_t = f(\xi_t) - \int_0^t Lf(\xi_s) \mathrm{d}s$$

是一个鞅. 特别地,可以构造非负函数 $u_x(\cdot) \in C_0^2$,使得

$$u_x(y) = |x - y|^2 \quad (\text{对}\ \forall\ |y - x| < 2\delta),$$

于是对 $x \in \left\{y; |y - x_0| < \frac{\delta}{2}\right\}$,我们有

$$P_x(A_h^c) \leqslant P_x(\max_{0 \leqslant t \leqslant h} |\xi_t - x_0| \geqslant \delta)$$
$$\leqslant P_x\left(\max_{0 \leqslant t \leqslant h} |\xi_t - x| \geqslant \frac{\delta}{2}\right) \leqslant P_x\left(\max_{0 \leqslant t \leqslant h} u_x(\xi_t) \geqslant \frac{\delta^2}{4}\right)$$

$$\leqslant P_x\left(\max_{0\leqslant t\leqslant h}\left[u_x(\xi_t)-\int_0^t Lu_x(\xi_u)\mathrm{d}u+Kt\right]\geqslant\frac{\delta^2}{4}\right),$$

其中$|Lu_x(y)|\leqslant K$. 再由下鞅不等式

$$P_x(A_h^c)\leqslant\frac{4}{\delta^2}E_x\left(u_x(\xi_h)-\int_0^h Lu_x(\xi_u)\mathrm{d}u+Kh\right)$$

$$=\frac{4}{\delta^2}Kh\to 0\quad(h\to 0).$$

于是存在 h 使得

$$2\|\varphi\|P_x(A_h^c)<\frac{\varepsilon}{3}.$$

这样,存在充分小的 h,使得

$$|u(x)-\varphi(x_0)|<\frac{2\varepsilon}{3}+2\|\varphi\|P_x(\tau\geqslant h)$$

$$\to\frac{2\varepsilon}{3}\quad(\text{当 } x\to x_0).$$

由于 ε 任意,所以$\lim\limits_{x\to x_0}|u(x)-\varphi(x_0)|=0$. ▌

§2 随机积分与微分(Ito 积分)

随机积分与微分是用概率方法来构造与研究扩散过程的基本工具. 在本节中,我们只给出它们的最简单的概念与性质,为了着重给读者以感性认识,我们加强了条件以简化证明,而不求所设条件的一般化与结论的加强.

设有概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及$\mathscr{F}$的子σ-代数族$(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$,又设$\{W_t;t\in\boldsymbol{R}^1\}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个 Brown 运动,且满足:

1) $\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}_{t'}\quad(t\leqslant t')$;

2) $W_t\in\mathscr{F}_t$;

3) 对$\forall\ t\geqslant s$, W_t-W_s 与 $\mathscr{F}_s$ 独立,即

$$P(W_t-W_s\in A|\mathscr{F}_s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_A \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{(t-s)}}\mathrm{d}y.$$

这样的一个过程$(W_t,\mathscr{F}_t;t\in \boldsymbol{R}^+)$也称为一个 Wiener 过程.

事实上，Wiener 过程只不过是把 Brown 运动时刻 t 前的 σ-代数扩大为一个与在 t 以后的一切增量 $W_{t'}-W_t(\forall\ t'\geqslant t)$都独立的 σ-代数 $\mathscr{F}_t$.

下面我们来定义对于 Wiener 过程的积分 $\int_0^T \xi(t,\omega)\mathrm{d}W_t$.

1. 随机积分的定义

令

$$\mathscr{L}_2^T=\Big\{\xi=(\xi(t,\omega);(t,\omega)\in \boldsymbol{R}^+\times\Omega);$$

$$\xi \text{ 循序可测而且 } E\int_0^T|\xi(t,\omega)|^2\mathrm{d}t<+\infty\Big\}.$$

在 $\mathscr{L}_2^T$ 中引入模 $\|\xi\|_T=\left(E\int_0^T|\xi(u,\omega)|^2\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}$，则 $\mathscr{L}_2^T$ 是 Hilbert 空间. 又令

$$\mathscr{L}_0=\Big\{\xi\in\mathscr{L}_2^T;\xi(t,\omega)=\xi(t_0,\omega)I_{\{t_0\}}(t)$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\xi(t_j,\omega)1_{(t_j,t_{j+1}]}(t)\quad(0=t_0<t_1<\cdots<t_n\uparrow\infty)\Big\}.$$

我们首先对 $\mathscr{L}_0$ 中的函数定义积分，然后再将它扩大到 $\mathscr{L}_2^T$ 上去.

对 $\xi\in\mathscr{L}_0$，令

$$\int_0^t\xi(s,\omega)\mathrm{d}W_s\triangleq\sum_i\xi(t_i,\omega)(W_{t\wedge t_{i+1}}-W_{t\wedge t_i}).$$

下面的命题说明，$\mathscr{L}_0$ 在 $\mathscr{L}_2^T$ 中稠，从而就可将随机积分的定义由 $\mathscr{L}_0$ 扩大到 $\mathscr{L}_2^T$ 中去.

命题 8.8 设 $\xi\in\mathscr{L}_2^T$，则存在 $\xi_n\in\mathscr{L}_0$，使得当 $n\to+\infty$时，

$$\|\xi-\xi_n\|_T^2\triangleq E\int_0^T|\xi_n(t,\omega)-\xi(t,\omega)|^2\mathrm{d}t\to 0.$$

证明 1° 不妨设 ξ 有界. 否则由

$$\| \xi - \xi 1_{\{\omega: |\xi(t,\omega)| \leqslant M\}} \|^2 = E\int_0^T |\xi(t,\omega)|^2 1_{\{\omega: |\xi(t,\omega)| \geqslant M\}} \mathrm{d}t$$
$$\to 0 \quad (M \to +\infty)$$

就可用 $\xi_M = \xi 1_{\{\omega: |\xi(t,\omega)| \leqslant M\}}$ 逼近 ξ.

2° 设 $\xi(t,\omega)$ 对 t 连续. 令

$$\xi_n(t,\omega) = \xi(0,\omega) I_{\{0\}}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi\left(\frac{k}{2^n},\omega\right) 1_{\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]}(t).$$

由控制收敛定理，当 $n \to \infty$ 时，

$$E\int_0^T |\xi_n(t,\omega) - \xi(t,\omega)|^2 \mathrm{d}t \to 0.$$

3° 现考虑一般的 $\xi \in \mathscr{L}_2^T$. 我们定义

$$\xi_h(t,\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h \xi(t-s,\omega)\mathrm{d}s, & t \geqslant h; \\ 0, & t < h. \end{cases}$$

显然 $\xi_h(t,\omega)$ 是对 t 连续而且循序可测的，并且

$$E(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\xi_h(t,\omega)|^2) \leqslant \frac{1}{h} E\int_0^T |\xi(u,\omega)|^2 \mathrm{d}u < +\infty.$$

于是由 Schwarz 不等式及 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}
\int_0^T \xi_h^2(t,\omega)\mathrm{d}t &= \int_0^T \left(\frac{1}{h}\int_0^h \xi(t-s,\omega)\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^T \frac{1}{h}\int_0^h |\xi(t-s,\omega)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\int_0^h \mathrm{d}s \int_0^T |\xi(t-s,\omega)|^2 \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^T |\xi(t,\omega)|^2 \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

所以 $\xi_h \in \mathscr{L}_2^T$. 由控制收敛定理得到 $h \to 0$ 时，

$$E\int_0^T |\xi_h(t,\omega) - \xi(t,\omega)|^2 \mathrm{d}t \to 0. \quad \blacksquare$$

命题 8.9 在 $\mathscr{L}_0$ 上定义的随机积分

$$\eta(t,\omega) = \int_0^t \xi(s,\omega)\mathrm{d}W_s$$

具有以下性质：

(1) $\eta(t,\omega)$对几乎所有的 ω 对 t 连续；

(2) $\{\eta(t,\omega),\mathscr{F}_t\}$是鞅；

(3) $E\eta(t,\omega)=0$,

$$E|\eta(t,\omega)|^2 = E\int_0^t |\xi(s,\omega)|^2 \mathrm{d}s,$$

$$E(\eta(t,\omega)\bar{\eta}(r,\omega)) = E\int_0^t \xi(s,\omega)\bar{\xi}(s,\omega)\mathrm{d}s;$$

(4) 对任意 $a_1(\omega),a_2(\omega)\in\mathscr{F}_s$

$$\int_s^t (a_1(\omega)\xi_1(u,\omega) - a_2(\omega)\xi_2(u,\omega))\mathrm{d}W_u$$

$$\left(\triangleq \int_0^t (a_1\xi_1 + a_2\xi_2)\mathrm{d}W_u - \int_0^s (a_1\xi_1 - a_2\xi_2)\mathrm{d}W_u\right)$$

$$= a_1(\omega)\int_s^t \xi_1(u,\omega)\mathrm{d}W_u + a_2(\omega)\int_s^t \xi_2(u,\omega)\mathrm{d}W_u;$$

(5) $\{\eta(t,\omega),\mathscr{F}_t\}$循序可测.

证明 (1) 因为 W_t 对 t 连续,所以

$$\eta(t,\omega) - \eta(s,\omega)$$

$$= \sum_{t\wedge s<t_j<t\vee s} \xi(t_j,\omega)(W_{t\wedge t_{j+1}} - W_{s\wedge t_{j+1}} - W_{t\wedge t_j} + W_{s\wedge t_{j+1}})$$

$$\to 0 \quad (\text{当 } s\to t).$$

可见 $\eta(t,\omega)$对几乎所有 ω 对 t 连续.

(2) 对 $s<t$,不妨设 $s\in\{t_j,j=1,2,\cdots\}$,我们有

$$E\left(\int_0^t \xi(u,\omega)\mathrm{d}W_u|\mathscr{F}_s\right)$$

$$= \sum_j \xi(t_j,\omega)(W_{s\wedge t_{j+1}} - W_{s\wedge t_j})$$

$$+ E\left(\sum_{s<t_j} \xi(t_j,\omega)(W_{t\wedge t_{j+1}} - W_{t\wedge t_j})|\mathscr{F}_s\right)$$

$$= \int_0^s \xi(u,\omega)\mathrm{d}W_u + \sum_{s<t_j} E[\xi(t_j,\omega)$$

$$\times E(W_{t\wedge t_{j+1}} - W_{t\wedge t_j} | \mathscr{F}_{t_j}) | \mathscr{F}_s]$$

$$= \int_0^s \xi(u,\omega) \mathrm{d}W_u = \eta(s,\omega).$$

(3) $$E\eta(t,\omega) = \sum_j E[\xi(t_j,\omega)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})]$$

$$= \sum_j E[\xi(t_j,\omega)E((W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) | \mathscr{F}_{t_j})]$$

$$= 0,$$

$$E(\eta(t,\omega)\tilde{\eta}(t,\omega))$$

$$= \sum_{i,j} E[\xi(t_i,\omega)\tilde{\xi}(t_j,\omega)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})]$$

$$= 2\sum_{i<j} E[E(\xi(t_i,\omega)\tilde{\xi}(t_j,\omega)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

$$\times (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) | \mathscr{F}_{t_j})]$$

$$+ \sum_j E[\xi(t_j,\omega)\tilde{\xi}(t_j,\omega)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2]$$

$$= \sum_j E(\xi(t_j,\omega)\tilde{\xi}(t_j,\omega)(t_{j+1} - t_j))$$

$$= \int_0^t E(\xi(s,\omega)\tilde{\xi}(s,\omega)\mathrm{d}s = E\int_0^t \xi(s,\omega)\tilde{\xi}(s,\omega)\mathrm{d}s.$$

(4) 证明方法与(2)类似，留给读者作为练习.

(5) 由定义显然成立. ▌

现在让我们来定义 $\mathscr{L}_2^T$ 中过程对 Wiener 过程的积分.

定义 8.2(随机积分) 设 $\xi \in \mathscr{L}_2^T$，对于 $\xi_n \in \mathscr{L}_0$，而且

$$E\int_0^t |\xi_n(u,\omega) - \xi(u,\omega)|^2 \mathrm{d}u \to 0 \quad (n \to \infty),$$

我们定义均方意义下的随机积分为

$$\int_0^t \xi(u,\omega)\mathrm{d}W_u \triangleq (L^2) \lim_{n\to\infty} \int_0^t \xi_n(u,\omega)\mathrm{d}W_u.$$

命题 8.10 定义 8.2 是合理的. 即

$$\eta_n(t,\omega) \triangleq \int_0^t \xi_n(u,\omega)\mathrm{d}W_u$$

在均方意义下收敛到一个与$\{\xi_n\}$取法无关的极限：

$$\eta(t,\omega)=\int_0^t \xi(u,\omega)\mathrm{d}W_u=\lim_{n\to\infty}\eta_n(t,\omega),$$

而且$\{\eta(t,\omega)\}$具有命题 8.9 中所列各性质.

证明 由于

$$E|\eta_n(t,\omega)-\eta_m(t,\omega)|^2=E\int_0^t|\xi_n(u,\omega)-\xi_m(u,\omega)|^2\mathrm{d}u$$

$$\to 0\quad(n,m\to+\infty),$$

在 $L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$中必存在 $\eta(t,\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n(t,\omega)$，并且当有不同的$\{\xi_n\}$与$\{\tilde{\xi}_n\}$满足定义要求时，它们对应的$\{\eta_n\}$与$\{\tilde{\eta}_n\}$应有

$$E|\eta_n(t,\omega)-\tilde{\eta}_n(t,\omega)|^2$$

$$=E\int_0^t|\xi_n(t,\omega)-\tilde{\xi}_n(t,\omega)|^2\mathrm{d}t$$

$$\leqslant 2E\int_0^T[|\xi_n(t,\omega)-\xi(t,\omega)|^2+|\tilde{\xi}_n(t,\omega)-\xi(t,\omega)|^2]\mathrm{d}t$$

$$\to 0\quad(n\to+\infty).$$

因而$\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n(t,\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\eta}_n(t,\omega)$.

注意到 8.9 中的全部性质在令 $n\to+\infty$取极限时都保持，可见η具有这些性质. ▍

2. Ito 公式

若对$\forall\ t\in[0,T]$,

$$X(t,\omega)=x_0+\int_0^t\xi(s,\omega)\mathrm{d}W_s,$$

则定义“**随机微分**”为

$$\mathrm{d}X_t=\xi(t,\omega)\mathrm{d}W_t.$$

类似于实函数微积分中的复合函数微分公式，对随机微分也有相应的公式——Ito 公式. 这里我们将复合函数微分公式写为积分形式.

定理 8.11 设

$$X_t = X_0 + \int_0^t \xi(s,\omega)\mathrm{d}W_s + \int_0^t g(s,\omega)\mathrm{d}s,$$

其中 ξ, g 是两个循序可测过程，$\xi \in \mathscr{L}_2^T$，g 为 L_1 可积. 又设函数 $F(t,x)$ 对 t 一阶连续可导、对 x 二阶连续可导，并且 $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ 有界. 那末

$$F(t,X_t) = F(0,X_0) + \int_0^t \alpha(s,\omega)\mathrm{d}W_s + \int_0^t \beta(s,\omega)\mathrm{d}s,$$

其中

$$\alpha(s,\omega) = \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\xi(s,\omega),$$

$$\beta(s,\omega) = \frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s) + \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)g(s,\omega) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X_s)\xi^2(s,\omega).$$

注： $\frac{\partial F}{\partial x}$等有界的条件实际上不必要，但为此需推广积分的含义.

在证明定理之前，让我们先直观上粗略地来看一下定理的大意. 如果注意到直观上大体有 $W_t - W_s \doteq \sqrt{t-s}$，当 $0 < t-s \to 0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
&F(t,X_t) - F(s,X_s) \\
&\quad = \frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s)(t-s) + \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)(X_t - X_s) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X_s)(X_s - X_t)^2 \\
&\qquad + o(t-s) + o(|X_t - X_s|^2) \\
&\quad = \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_t)(t-s) + \frac{\partial F}{\partial X}(s,X_s)(\xi(s,\omega)(W_t - W_s)) \\
&\qquad + \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)g(s,\omega)(t-s) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X_s)(\xi^2(s,\omega)(W_t - W_s)^2) + o(t-s) \\
&\quad = \alpha(s,\omega)(W_t - W_s) + \beta(s,\omega)(t-s) + o(t-s).
\end{aligned}$$

这里，与普通函数的复合函数导数公式不同在于 $t-s$ 的系数多了 $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\xi^2$ 这项. 这是由于 W_t-W_s 大体是与 $\sqrt{t-s}$ 同级的缘故.

定理的证明

1° 由于 $\frac{\partial F}{\partial x}$ 有界，所以 $\frac{\partial F}{\partial x}\xi\in\mathscr{L}_2^T$，因此 $\int_0^t \alpha(s,\omega)\mathrm{d}W_s$ 有定义. 我们取 $\xi_n, g_n\in\mathscr{L}_0$，使得当 $n\to\infty$，

$$E\int_0^T|\xi_n-\xi|^2\mathrm{d}s\to 0,\quad E\int_0^T|g_n-g|\mathrm{d}s\to 0.$$

令

$$X_n(t,\omega)=X_0+\int_0^t\xi_n(s,\omega)\mathrm{d}W_s+\int_0^t g_n(s,\omega)\mathrm{d}s.$$

现在证明：对 $\forall\ \varepsilon>0$，当 $n\to+\infty$ 时，

$$P(\max_{0\leqslant t\leqslant T}|X_n(s,\omega)-X(s,\omega)|\geqslant\varepsilon)\to 0.\tag{8.13}$$

事实上，

$$\begin{aligned}
&P(\max_{0\leqslant t\leqslant T}|X_n(t,\omega)-X(t,\omega)|\geqslant\varepsilon)\\
&\leqslant P\left(\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t(\xi_n(s,\omega)-\xi(s,\omega))\mathrm{d}W_s\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&\quad+P\left(\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t(g_n(s,\omega)-g(s,\omega))\mathrm{d}s\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&\leqslant\frac{4}{\varepsilon^2}E\int_0^T|\xi_n(s,\omega)-\xi(s,\omega)|^2\mathrm{d}s\\
&\quad+\frac{2}{\varepsilon}E\int_0^T|g_n(s,\omega)-g(s,\omega)|\mathrm{d}s\\
&\to 0\ \ (\text{当 } n\to+\infty).
\end{aligned}$$

2° 证明

$$\begin{aligned}
&E\left|\int_s^t\frac{\partial F}{\partial x}(u,X_n(u,\omega)\xi_n(u,\omega)\mathrm{d}W_u\right.\\
&\qquad\left.-\int_s^t\frac{\partial F}{\partial x}(u,X(u,\omega))\xi(u,\omega)\mathrm{d}W_u\right|^2\\
&\qquad\to 0\ \ (n\to\infty).
\end{aligned}$$

事实上，

$$E\left|\int_s^t\left(\frac{\partial F}{\partial x}(u,X_n)\xi_n-\frac{\partial F}{\partial x}(u,X)\xi\right)\mathrm{d}W_u\right|^2$$

$$\leqslant 2E\int_s^t\left[\left|\frac{\partial F}{\partial x}(u,X_n)\right|^2|\xi_n(u,\omega)-\xi(u,\omega)|^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial F}{\partial x}(u,X_n)-\frac{\partial F}{\partial x}(u,X)\right)^2|\xi|^2\right]\mathrm{d}u$$

$$\leqslant 2cE\int_0^T|\xi_n(u,\omega)-\xi(u,\omega)|^2\mathrm{d}u$$

$$+2E\int_s^t\left|\frac{\partial F}{\partial x}(u,X_n)-\frac{\partial F}{\partial x}(u,X)\right|^2|\xi|^2\mathrm{d}u.$$

因为

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(u,X_n)-\frac{\partial F}{\partial x}(u,X)\right|^2\leqslant 2c,$$

由控制收敛定理，上式当 $n\to\infty$ 时趋于 0.

3° 证明存在 $\{n_k\}$ 使

$$\int_s^t\beta_{n_k}(u,\omega)\mathrm{d}u-\int_s^t\beta(u,\omega)\mathrm{d}u\to 0\quad(\text{a.e.}\ \mathrm{d}p)(k\to\infty),$$

其中

$$\beta_n(u,\omega)=\frac{\partial F}{\partial u}(u,X_n(u,\omega))+\frac{\partial F}{\partial x}(u,X_n(u,\omega))g_n(u,\omega)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u,X_n(u,\omega))\xi_n^2(u,\omega).$$

事实上，由(8.13)可得到子列 n_k，使

$$\sum_k P\left(\max_{0\leqslant s\leqslant T}|X_{n_k}(s,\omega)-X(s,\omega)|\geqslant\frac{1}{2^k}\right)<+\infty,$$

于是当 $k\to\infty$ 时，

$$\max_{0\leqslant s\leqslant T}|X_{n_k}(s,\omega)-X(s,\omega)|\to 0\quad(\text{a.e.}\ \mathrm{d}P).$$

而对固定的 ω，$X(u,\omega)$ 应在 $[s,t]$ 上有界，即存在 C 使

$$|X(u,\omega)|\leqslant C\quad(\forall\ u\in[s,t]).$$

于是由 $\frac{\partial F}{\partial t},\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ 的连续性，推出它们在 $[s,t]\times[-C,C]$ 上一致连续. 进而可见

$$\sup_{s\leqslant u\leqslant t}|\beta_{n_k}(u,\omega)-\beta(u,\omega)|\to 0.$$

由此立即得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_s^t(\beta_{n_k}(u,\omega)-\beta(u,\omega))\mathrm{d}u\to 0 \quad (\text{a.e. } \mathrm{d}P).$$

同样，由于 $F(t,x)$ 在 $[0,T]\times[-C,C]$ 连续，因而一致连续，所以当 $k\to+\infty$ 时，

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|F(s,X_{n_k}(s,\omega))-F(s,X(s,\omega))|\to 0 \quad (\text{a.e. } \mathrm{d}P).$$

由此可见，剩下只要对 ξ,g 都是简单函数的情况证明定理就行了.

4° 设 $0\leqslant t\leqslant T$，

$$\xi(t,\omega)=\xi_0(\omega)1_{\{0\}}(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k(\omega)1_{(t_k,t_{k+1}]}(t),$$

$$g(t,\omega)=\eta_0(\omega)1_{\{0\}}(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k(\omega)1_{(t_k,t_{k+1}]}(t).$$

于是

$$F(t,X_t)-F(0,X_0)-\int_0^t\frac{\partial F}{\partial X}(s,X_s)\xi(s,\omega)\mathrm{d}W_s$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\Big[F(t_{k+1},X_{t_{k+1}})-F(t_k,X_{t_k})$$

$$-\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\xi(t_k,\omega)\mathrm{d}W_s\Big].$$

可见只对每一小段 $(t_k,t_{k+1}]$（下面改记为 $(s,t]$）来证明定理就够了，也就是说，不妨设 $\xi(t,\omega)$，$g(t,\omega)$ 都与 t 无关. 如果 $\{\tau_k,k=0,1,\cdots,m\}$ 是 $(s,t]$ 的分割，那么

$$F(t,X(t,\omega))-F(s,X(s,\omega))-\int_s^t\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\xi(\omega)\mathrm{d}W_s$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}(F(\tau_{k+1},X_{\tau_{k+1}})-F(\tau_k,X_{\tau_k}))$$

$$-\xi(\omega)\int_s^t\frac{\partial F}{\partial x}(u,X_u)\mathrm{d}W_u. \tag{8.14}$$

由于$\frac{\partial F}{\partial x}(u,X_u)$对 u 在$[s,t]$上一致连续且有界，所以在均方意义下有

$$\int_s^t \frac{\partial F}{\partial x}(u,X_u)\mathrm{d}W_u = (L^2)\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\partial F}{\partial x}(\tau_k,X_{\tau_k})(W_{\tau_{k+1}}-W_{\tau_k}).$$

这样，(8.14)右端极限为

$$\begin{aligned}
&(L^2)\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\Big(F(\tau_{k+1},X_{\tau_{k+1}})-F(\tau_k,X_{\tau_k})\\
&\qquad -\xi(\omega)\frac{\partial F}{\partial x}(\tau_k,X_{\tau_k})(W_{\tau_{k+1}}-W_{\tau_k})\Big)\\
&\quad=(L^2)\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\Big\{\frac{\partial F}{\partial t}(\tau_k,X_{\tau_{k+1}})(\tau_{k+1}-\tau_k)\\
&\qquad+\frac{\partial F}{\partial x}(\tau_k,X_{\tau_k})(X_{\tau_{k+1}}-X_{\tau_k})\\
&\qquad+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\tau_k,\widetilde{X}_{\tau_k})(X_{\tau_{k+1}}-X_{\tau_k})^2\\
&\qquad-\xi(\omega)\frac{\partial F}{\partial x}(\tau_k,X_{\tau_k})(W_{\tau_{k+1}}-W_{\tau_k})\Big\}\ (\widetilde{X}_{\tau_k}\text{在 } X_{\tau_k},X_{\tau_{k+1}}\text{间})\\
&\quad=(L^2)\lim_{m\to\infty}\Big[\sum_{k=0}^{m-1}\Big\{\frac{\partial F}{\partial t}(\tau_k,X_{\tau_{k+1}})+\frac{\partial F}{\partial x}(\tau_k,X_{\tau_k})g(\omega)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\xi^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\tau_k,\widetilde{X}_{\tau_k})\Big\}(\tau_{k+1}-\tau_k)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\tau_k,\widetilde{X}_{\tau_k})\big((X_{\tau_{k+1}}-X_{\tau_k})^2\\
&\qquad-\xi^2(\tau_{k+1}-\tau_k)\big)\Big].
\end{aligned}\tag{8.15}$$

由于$\frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t)$，$\frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)$，$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X_t)$都对 t 连续，可见第一个和号的极限是

$$\int_t^s\Big\{\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)+g\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)+\frac{1}{2}\xi^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X_s)\Big\}\mathrm{d}s.$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
&(X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k})^2 - \xi^2(\omega)(\tau_{k+1} - \tau_k) \\
&= \xi^2(\omega)[(W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k})^2 - (\tau_{k+1} - \tau_k)] \\
&\quad + 2\xi(\omega)g(\omega)(W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k})(\tau_{k+1} - \tau_k) + g^2(\tau_{k+1} - \tau_k)^2 \\
&= \xi^2[(W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k})^2 - (\tau_{k+1} - \tau_k)] \\
&\quad + o(\tau_{k+1} - \tau_k).
\end{aligned}
$$

由于$\{(W_{\tau_{k+1}}-W_{\tau_k})^2-(\tau_{k+1}-\tau_k);k\geqslant 0\}$相互独立，所以对

$$
I \triangleq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\tau_k, \widetilde{X}_{\tau_k})\xi^2((W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k})^2 - (\tau_{k+1} - \tau_k))
$$

而言，I^2 各加项的交叉乘积的数学期望为 0，于是存在常数 C 使

$$
\begin{aligned}
EI^2 &\leqslant C\sum_{k=0}^{m-1} E[(W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k})^2 - (\tau_{k+1} - \tau_k)]^2 \\
&\leqslant 2C\sum_{k=0}^{m-1} E[(W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k})^4 + (\tau_{k+1} - \tau_k)^2] \\
&= 8C\sum_{k=0}^{m-1} (\tau_{k+1} - \tau_k)^2 \to 0.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\tau_k, \widetilde{X}_{\tau_k})\xi^2(W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k})^2 \xrightarrow{p} \int_s^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, X_u)\xi^2 \mathrm{d}u.
$$

此外，由 W_t 在$[s,t]$上一致连续，我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m-1} |W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k}|(\tau_{k+1} - \tau_k) \\
&\qquad \leqslant \max_k |W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k}| \sum_{k=0}^{m-1} (\tau_{k+1} - \tau_k) \\
&\qquad = \max_k |W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k}|(t - s) \to 0.
\end{aligned}
$$

显然还有

$$
\sum_{k=0}^{m-1} (\tau_{k+1} - \tau_k)^2 \leqslant \max_k (\tau_{k+1} - \tau_k)(t - s) \to 0 \quad (m \to \infty).
$$

这就证明了当 $m\to\infty$ 时(8.15)中第二项和数

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\tau_k,\tilde{X}_{\tau_k})(X_{\tau_{k+1}}-X_{\tau_k})^2-\int_s^t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u,X_u)\xi^2\mathrm{d}u\xrightarrow{p}0.$$

于是 Ito 公式得证. ▌

不难将 Ito 公式推广到高维的情况.

定理 8.11′ 设 $F(t,x)(t\geqslant 0,x\in\boldsymbol{R}^d)$ 是对 t 一阶连续可导,对 $x^{(i)},x^{(j)}$ 有二阶连续偏导数的实函数;$\frac{\partial F}{\partial x^i},\frac{\partial F}{\partial t},\frac{\partial^2 F}{\partial x^i\partial x^j}(i,j=1,2,\cdots,d)$ 有界. 又设

$$X_t^{(i)}=X_0^{(i)}+\int_0^t\sum_{j=1}^r\xi_j^{(i)}(s,\omega)\mathrm{d}W_s^{(j)}+\int_0^t g^{(i)}(s,\omega)\mathrm{d}s.$$

则

$$\begin{aligned}F(t,X_t)=F(0,X_0)&+\sum_{j=1}^r\sum_{i=1}^d\int_0^t\frac{\partial F}{\partial x^i}(s,X_s)\xi_j^{(i)}(s,\omega)\mathrm{d}W_s^{(j)}\\&+\int_0^t\Big[\frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s)+\sum_{i=1}^d\frac{\partial F}{\partial x^i}(s,X_s)\,g^{(i)}(s,\omega)\\&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial^2 F}{\partial x^i\partial x^j}(s,X_s)\sum_{k=1}^d\xi_k^{(i)}(s,\omega)\xi_k^{(j)}(s,\omega)\Big]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

§3 随机微分(积分)方程的解与扩散过程

从 Ito 公式我们可以看到:当给定连续有界的扩散系数 $a(x)$ 与漂移系数 $b(x)$(这里考虑一维的情况),我们如果能得到下面方程的轨道连续解 X_t:

$$\mathrm{d}X_t=\sqrt{a(X_t)}\mathrm{d}W_t+b(X_t)\mathrm{d}t,$$

其中 $\{W_t\}$ 是 Brown 运动,而 $X_t\in\mathscr{F}_t\triangleq\sigma(X_0,W_u;u\leqslant t)$,那么,对 $f\in C_0^2$(二阶可微紧支集函数),$\left\{f(X_t)-\int_0^t Lf(X_u)\mathrm{d}u,\mathscr{F}_t\right\}$ 是鞅 $\left(\text{其中 } Lf=\frac{1}{2}af''+bf'\right)$(请对照 §6.1 命题 6.6). 在下面的定理

中，我们会看到当方程

$$\begin{cases} X_t = X_s + \int_s^t \sqrt{a(X_u)}\mathrm{d}W_u + b(X_u)\mathrm{d}u, \\ X_s = x \end{cases} \tag{8.16}$$

对$\forall\ s>0, x\in \mathbf{R}^1$ 都存在分布唯一解（即任意两个解都同分布），就有

$$E_x(f(X_t)|\mathscr{F}_s) = f(X_s) + \int_s^t E_{X_s}(Lf(X_u))\mathrm{d}u$$
$$= E_x(f(X_t)|X_s).$$

也就是$\{X_t, \mathscr{F}_t\}$是马氏过程，并且当 $f\in C_0^2$ 时 $\hat{\mathscr{A}}f = Lf$（$\hat{\mathscr{A}}$ 是$\{X_t, \mathscr{F}_t\}$的形式生成元）. 这样，$\{X_t\}$正是我们要由 a, b 去寻找的扩散过程. 由此可见，由扩散系数与漂移系数去构造扩散过程的问题，也就是构造随机微分方程(8.16)的解及其解的唯一性问题.

1. Ito 随机微分方程的强解的存在唯一性

定理 8.12 设在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上有 σ-代数族 $\mathscr{F}_t\uparrow$，$\{W_t, \mathscr{F}_t\}$是 Wiener 过程. 又设 $\sigma(x), b(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的实函数，满足以下条件：

1) σ, b 有界：$|\sigma(x)|\leqslant A, |b(x)|\leqslant A$；

2) 对$\forall\ x_1, x_2\in \mathbf{R}^1$，

$$|\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| \leqslant A|x_1 - x_2|,$$
$$|b(x_1) - b(x_2)| \leqslant A|x_1 - x_2|;$$

则对任一 $X_0(\omega)\in\mathscr{F}_0$，且 $EX_0(\omega)^2<\infty$，下面的方程有唯一解

$$\begin{cases} X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t \sigma(X_u(\omega))\mathrm{d}W_u + \int_0^t b(X_u(\omega))\mathrm{d}u, \\ \{X_t(\omega); t\in \mathbf{R}^+\} \text{ 对 } \mathscr{F}_t \text{ 循序可测}, \end{cases} \tag{8.17}$$

而且这时 $E(f(X_t(\omega))|\mathscr{F}_0) = E(f(X_t(\omega))|X_0)$对任意有界连续函数 f 成立.

证明 1° 我们用类似于常微分方程中的逐次逼近法来证明方程(8.17)的解的存在性. 令

$$X_t^{(0)}(\omega) \equiv X_0(\omega),$$

$$X_t^{(n+1)}(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t \sigma(X_u^{(n)}(\omega))\mathrm{d}W_u + \int_0^t b(X_u^{(n)}(\omega))\mathrm{d}u. \tag{8.18}$$

首先，我们可以看出全部$\{X_t^{(n)}(\omega); t \in \boldsymbol{R}^+\}$$(n=0,1,\cdots)$都是循序可测的，对 t 是连续的. 又令

$$\begin{aligned}\Delta_n(t,\omega) &\triangleq X_t^{(n)}(\omega) - X_t^{n-1}(\omega) \\ &= \int_0^t (\sigma(X_s^{n-1}(\omega)) - \sigma(X_s^{(n-2)}(\omega)))\mathrm{d}W_s \\ &\quad + \int_0^t (b(X_s^{(n-1)}(\omega)) - b(X_s^{(n-2)}(\omega)))\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}E|\Delta_n(t,\omega)|^2 &\leqslant 2E\left|\int_0^t (\sigma(X_s^{n-1}(\omega)) - \sigma(X_s^{(n-2)}(\omega)))\mathrm{d}W_s\right|^2 \\ &\quad + 2E\left|\int_0^t (b(X_s^{(n-1)}(\omega)) - b(X_s^{(n-2)}(\omega)))\mathrm{d}s\right|^2 \\ &\triangleq \mathrm{I} + \mathrm{II},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &\leqslant 2E\int_0^t |\sigma(X_s^{(n-1)}(\omega)) - \sigma(X_s^{(n-2)}(\omega))|^2 \mathrm{d}s \\ &\leqslant 2A^2E\int_0^t |X_s^{(n-1)}(\omega) - X_s^{n-2}(\omega)|^2 \mathrm{d}s \\ &= 2A^2E\int_0^t |\Delta_{n-1}(s,\omega)|^2 \mathrm{d}s;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{II} &\leqslant 2tE\int_0^t |b(X_s^{(n-1)}(\omega)) - b(X_s^{n-2}(\omega))|^2 \mathrm{d}s \\ &\leqslant 2tA^2E\int_0^t |\Delta_{n-1}(s,\omega)|^2 \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

将 $E|\Delta_n(t,\omega)|^2$ 记为 $\varphi_n(t)$，我们得到

$$\varphi_n(t) \leqslant 2A^2(t+1)\int_0^t \varphi_{n-1}(s)\mathrm{d}s \quad (n = 2,3,\cdots). \tag{8.19}$$

注意到

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= E|X_t^{(1)}(\omega) - X_t^{(0)}(\omega)|^2 \\
&= E\left|\int_0^t \sigma(X_0)\mathrm{d}W_s + \int_0^t b(X_0)\mathrm{d}s\right|^2 \\
&= E|\sigma(X_0)(W_t - W_0) + tb(X_0)|^2 \\
&= tE(\sigma^2(X_0)) + t^2E(b^2(X_0)) \\
&\leqslant A^2t(t+1).
\end{aligned}
$$

由(8.19)容易用归纳法证明

$$
\varphi_n(t) \leqslant \frac{2^{n-1}A^{2n}t^n(1+t)^n}{n!}.
$$

于是
$$
\sum_{n=1}^{\infty} E|\Delta_n(t,\omega)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n(t))^{\frac{1}{2}} < +\infty,
$$

可见 $E\sum_{n=1}^{\infty}|X_t^{(n)}(\omega) - X_t^{(n-1)}(\omega)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} E|\Delta_n(t,\omega)| < +\infty$,

即

$$
\begin{aligned}
X_t(\omega) &\triangleq \lim_{n\to\infty} X_t^{(n)}(\omega) \\
&= X_0(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty}(X_t^{(n)}(\omega) - X_t^{(n-1)}(\omega))
\end{aligned}
$$

等式右端几乎处处收敛并有限,将它记为 $X_t(\omega)$. 我们得到

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^t |X_s^{(n)}(\omega) - X_s^{(m)}(\omega)|^2\mathrm{d}s \leqslant \sum_{k=n}^{m} E\int_0^t |\Delta_k(s,\omega)|^2\mathrm{d}s 2^k \\
&\leqslant \sum_{k=n}^{m} 2^k\int_0^t \frac{2^{k-1}A^{2k}s^k(1+s)^k}{k!}\mathrm{d}s \leqslant \sum_{k=n}^{m}\frac{2^{2k-1}(1+t)^{2k-1}A^{2k}}{k!(2k+1)} \\
&\to 0 \quad (n,m\to\infty).
\end{aligned}
$$

因此

$$
E\int_0^t |X_s^{(n)}(\omega) - X_s(\omega)|^2\mathrm{d}s \to 0 \quad (n\to\infty).
$$

利用随机积分的性质,我们得到

$$
E\left|\int_0^t \sigma(X_u^{(n)}(\omega))\mathrm{d}W_u - \int_0^t \sigma(X_u(\omega))\mathrm{d}W_u\right|^2
$$

$$= E\int_0^t |\sigma(X_u^{(n)}(\omega)) - \sigma(X_u(\omega))|^2 du$$

$$\leqslant A^2 E\int_0^t |X_u^{(n)}(\omega) - X_u(\omega)|^2 du$$

$$\to 0 \quad (n \to \infty).$$

$$E\left|\int_0^t b(X_u^{(n)}(\omega))du - \int_0^t b(X_u(\omega))du\right|^2$$

$$\leqslant tE\int_0^t |b(X_u^{(n)}(\omega)) - b(X_u(\omega))|^2 du$$

$$\leqslant tA^2 E\int_0^t |X_u^{(n)}(\omega) - X_u(\omega)|^2 du$$

$$\to 0 \quad (n \to \infty).$$

于是在(8.18)中令 $n\to+\infty$,就得到

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t \sigma(X_u(\omega))dW_u + b(X_u(\omega))du.$$

而且 X_t 是对 $\mathscr{F}_t$ 循序可测,对 t 连续的.

2° 现在来证明唯一性.

设 X_t, Y_t 都是(8.17)的连续解. 令

$$\varphi(t) = E|X(t,\omega) - Y(t,\omega)|^2,$$

由于 $|\sigma|\leqslant A, |b|\leqslant A$,所以对 $t<+\infty$,

$$E|X_t - Y_t|^2 \leqslant 2E\int_0^t |\sigma(X_u) - \sigma(Y_u)|^2 du$$

$$+ 2tE\int_0^t |b(X_u) - b(Y_u)|^2 du$$

$$\leqslant 8A^2 t(1+t) < +\infty,$$

因此 $\varphi(t)<+\infty$,而且

$$\varphi(t) \leqslant 2A^2(1+t)\int_0^t \varphi(s)ds \leqslant \cdots \leqslant \frac{2^n A^{2n}(1+t)^n}{n!}\varphi(t)$$

$$\to 0 \quad (n \to +\infty),$$

可见 $\varphi(t)=0$,即对任意固定 $t>0$,

$$E|X_t - Y_t|^2 = 0, \quad X_t = Y_t \quad (\text{a.e.}).$$

又由 X_t, Y_t 的轨道连续性得

$$X_\cdot(\omega) = Y_\cdot(\omega) \quad (\text{a.e.}).$$

3° 根据条件期望的定义与有界收敛定理，由

$$E(f(X_t^{(n)}(\omega))|\mathscr{F}_0) = E(f(X_t^{(n)}(\omega))|X_0)$$

容易证明：对有界连续函数 f，有

$$E(f(X_t)|\mathscr{F}_0) = E(f(X_t)|X_0). \ \blacksquare$$

注： 定理中条件 $|\sigma(x)|, |b(x)| \leqslant A$ 是可以解除的，只需在证明中用 $|\sigma(x)|, |b(x)| \leqslant A_1 + A_2|x|$ 来代替 $|\sigma(x)|, |b(x)| \leqslant A$，而前者是 $\sigma(x)$，$b(x)$ 满足 Lipschitz 条件的推论；但是在这里我们着重在交待利用随机微分方程构造扩散的主要思想与方法，所以找了一个最简单的办法得到解的存在唯一性，而不去追求得到最好的条件.

2. 由 Ito 方程构造扩散过程

定理 8.13 在定理 8.12 中所得的解是一个强马氏过程.

证明 设 τ 是对 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的停时，$\{X_t(\omega); t \geqslant 0\}$ 是定理 8.12 中所得的随机积分方程的解. 不妨假定 $P(\tau < \infty) = 1$. 令

$$\xi_0(\omega) = X_\tau(\omega) \in \mathscr{F}_\tau,$$

$$\widetilde{W}_u = W_{u+\tau} - W_\tau \quad (u \geqslant 0),$$

$$\widetilde{\mathscr{F}}_t = \sigma(\mathscr{F}_\tau \cup \{\widetilde{W}_u; 0 \leqslant u \leqslant t\}),$$

于是，$\{\widetilde{W}_t, \widetilde{\mathscr{F}}_t\}$ 是一个 Wiener 过程，再由定理 8.12，得方程

$$\begin{cases} \xi_t(\omega) = \xi_0(\omega) + \int_0^t \sigma(\xi_u(\omega))\mathrm{d}\widetilde{W}_u + \int_0^t b(\xi_u(\omega))\mathrm{d}u, \\ \{\xi_t\} \text{ 对 } \{\widetilde{\mathscr{F}}_t\} \text{ 循序可测} \end{cases} \quad (8.20)$$

有唯一解. 但 $\{\xi_t\}$ 与 $\{X_{t+\tau}\}$ 都是(8.20)的解，因此

$$\xi_\cdot(\omega) = X_{\cdot+\tau}(\omega),$$

而且对 $\forall\ t > s$，及有界连续函数 f，

$$E(f(\xi_t)|\widetilde{\mathscr{F}}_0) = E(f(\xi_t)|\xi_0(\omega)),$$

即

$$E(f(X_{t+\tau})|\mathscr{F}_\tau) = E(f(X_{t+\tau})|X_\tau),$$

所以 $\{X_t, \mathscr{F}_t; t \geqslant 0\}$ 是强马氏的. $\blacksquare$

定理 8.12,8.13 可以不困难地推广到 $\boldsymbol{R}^d$ 上的随机积分方程问题.

定理 8.12′ 设 $E(X_0^{(i)})^2<\infty$,

$$|b_i(x_1)-b_i(x_2)|\leqslant A|x_1-x_2|,$$
$$|\sigma_{ij}(x_1)-\sigma_{ij}(x_2)|\leqslant A|x_1-x_2|,$$

对$\forall\ x_1,x_2\in\boldsymbol{R}^d(i,j=1,\cdots,d)$成立;$W_t=(W_t^{(i)})$是 $\boldsymbol{R}^d$ 上 Brown 运动,$W_t\in\mathscr{F}_t$,则存在唯一的对$\{\mathscr{F}_t\}$循序可测的过程

$$(X_t;t\geqslant 0)=((X_t^{(i)});t\geqslant 0)$$

满足方程

$$X_t^{(i)}(\omega)=X_0^{(i)}(\omega)+\sum_j\int_0^t\sigma_{ij}(X_u(\omega))\mathrm{d}W_u^{(j)}+\int_0^t b_i(X_u(\omega))\mathrm{d}u.$$

此外,对任何 $\boldsymbol{R}^d\to\boldsymbol{R}^1$ 连续有界函数 f 有

$$E(f(X_t)|\mathscr{F}_0)=E(f(X_t)|X_0).$$

定理 8.13′ 在定理 8.12′中所得的解$(X_t;t\geqslant 0)$是以$(\boldsymbol{R}^d,\mathscr{B}^d)$为状态空间的轨道连续的强马氏过程.

定理 8.14 对定理 8.12′中所得的马氏过程 $X=(X_t;t\geqslant 0)$,若将其无穷小生成元及其定义域记为 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{D}(\mathscr{A})$,则 $C_0^2\subset\mathscr{D}(\mathscr{A})$,而且对$\forall\ f\in C_0^2$,$\mathscr{A}f=Lf$,其中

$$Lf(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i},$$

$$a_{ij}(x)=\sum_{k=1}^d\sigma_{ik}(x)\sigma_{kj}(x)\quad(\text{即 }\boldsymbol{A}(x)=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma}^T).$$

证明 对二阶连续可导紧支集函数 f,由 Itô 公式我们有

$$\mathrm{d}f(X_t)=\sum_{i=1}^d\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t)\sum_{j=1}^d\sigma_{ij}(X_t)\mathrm{d}W_t^j+\sum_{i=1}^d\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t)b_i(X_t)\mathrm{d}u$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X_t)\mathrm{d}.$$

因此 $$E_xf(X_t)=f(x)+\int_0^t E_x(Lf(X_u))\mathrm{d}u.$$

于是

$$\| E_x f(X_t) - f(x) \| = \left\| \int_0^t E_x Lf(X_u) \mathrm{d}u \right\|$$
$$\leqslant t \| Lf \| \to 0 \quad (\text{当 } t \to 0).$$

可见 $C_0^2 \subset B_0(\boldsymbol{R}^d)$（强连续中心）. 又由于 $B_0(\boldsymbol{R}^d)$ 是闭的，因此 C_0（紧支集连续函数集）$\subset B_0(\boldsymbol{R}^d)$. 于是由 Lf 仍是紧支集连续函数，可以得到

$$\left\| \frac{1}{t}(E_x f(X_t) - f(x)) - Lf(x) \right\|$$
$$\leqslant \frac{1}{t} \int_0^t \| E_x(Lf(X_u)) - Lf(x) \| \mathrm{d}u$$
$$\leqslant \max_{0 \leqslant u \leqslant t} \| E_x Lf(X_u) - Lf(x) \|.$$

又由紧支集连续函数可用 C_0^2 中函数一致逼近，所以存在 φ_n，使

$$\| \varphi_n(x) - Lf(x) \| \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

于是 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, N$ 使

$$\| \varphi_N(x) - Lf(x) \| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

那么 $$\| E_x(\varphi_N(X_u) - Lf(X_u)) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{4},$$

于是

$$\max_{0 \leqslant u \leqslant t} \| E_x Lf(X_u) - Lf(x) \|$$
$$\leqslant \max_{0 \leqslant u \leqslant t} (\| E_x(Lf(X_u) - \varphi_N(X_u)) \|$$
$$+ \| E_x(\varphi_N(X_u) - \varphi_N(x)) \|) + \| Lf(x) - \varphi_N(x) \|$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + t \| L\varphi_N \|.$$

取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2 \| L\varphi_N \|}$，则当 $0 \leqslant t \leqslant \delta$ 时，

$$\max_{0 \leqslant u \leqslant t} \| E_x Lf(X_u) - Lf(x) \| < \varepsilon.$$

于是，当 $t \to 0$ 时

$$\left\| \frac{1}{t}(E_x f(X_t) - f(x)) - Lf(x) \right\| \to 0.$$

也即 $f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$，而 $\mathscr{A}f=Lf$. ▌

§4 与扩散相联系的鞅与 Girsanov 公式

1. 指数鞅

在第五章中，我们已看到由 Brown 运动$\{B_t;t\geqslant 0\}$可以引出指数鞅$\{e^{\lambda B_t-\frac{1}{2}\lambda^2 t},\mathscr{F}_t\}$，其中 $\mathscr{F}_t=\sigma(B_s;s\leqslant t)$. 实际上，对于 Wiener 过程的 Ito 积分也可以引出相应的指数鞅.

命题 8.15 设在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上有 Wiener 过程$\{W_t,\mathscr{F}_t;t\geqslant 0\}$. 又设$\{\xi_t(\omega),\mathscr{F}_t;t\geqslant 0\}$循序可测；并存在常数 L，使

$$|\xi_t(\omega)|\leqslant L\quad(\forall\ \omega\in\Omega,t\geqslant 0).$$

令
$$Z_t(\omega)\triangleq\exp\left[\int_0^t\xi_s(\omega)\mathrm{d}W_s-\frac{1}{2}\int_0^t|\xi_s(\omega)|^2\mathrm{d}s\right].$$

则$\{Z_t,\mathscr{F}_t;t\geqslant 0\}$是鞅.

证明 记指数上的积分为 X_t，对 e^{X_t}用 Ito 公式即得命题. ▌

2. Brown 运动平移的测度（Girsanov 公式）

设在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上，$(W_t,\mathscr{F}_t)$是 Wiener 过程；$\{\varphi_u(\omega);u\geqslant 0\}$对$(\mathscr{F}_t)$循序可测，并有界

$$|\varphi_u(\omega)|\leqslant L\quad(\forall\ u\geqslant 0,\omega\in\Omega).$$

定理 8.16（Girsanov 公式） 若 $X_t=W_t-\int_0^t\varphi_u(\omega)\mathrm{d}u$，令

$$\mathscr{F}_\infty=\sigma\Big(\bigcup_t\mathscr{F}_t\Big),$$

$$\widetilde{P}(A)=\int_A Z_t(\omega)\mathrm{d}P\quad(\forall\ A\in\mathscr{F}_t),\tag{8.21}$$

其中
$$Z_t(\omega)=\exp\Big(\int_0^t\varphi_u(\omega)\mathrm{d}W_u-\frac{1}{2}\int_0^t|\varphi_u(\omega)|^2\mathrm{d}u\Big).$$

则 $\widetilde{P}(\cdot)$是$(\Omega,\mathscr{F}_\infty)$上完好定义的测度，并且$\{X_t;t\geqslant 0\}$对 $\mathscr{F}_t$ 是$(\Omega,\mathscr{F}_\infty,\widetilde{P})$上的 Brown 运动.

注：φ_u 有界的条件可减弱，请参考[G].

证明 1) 证(8.21)式完好地定义了 $\mathscr{F}_\infty$ 上的测度 $\widetilde{P}$.

首先，若 $A\in\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t$，那么由于$\{Z_t,\mathscr{F}_t\}$是鞅，我们有

$$E(Z_t(\omega)1_A)=E(Z_s(\omega)1_A).$$

可见按(8.21)式，无论把 A 看成 $\mathscr{F}_s$ 上或 $\mathscr{F}_t$ 上的集合，$\widetilde{P}(A)$的定义是唯一确定的. 又对 $A\in\mathscr{F}_\infty$，由于$\{E(1_A|\mathscr{F}_t),\mathscr{F}_t\}$是一致可积鞅，我们有

$$1_A=E(1_A|\mathscr{F}_\infty)=\lim_{t\to\infty}E(1_A|\mathscr{F}_t).$$

于是可定义

$$\widetilde{P}(A)=\lim_{t\to\infty}E(E(1_A|\mathscr{F}_t)Z_t)=\lim_{t\to\infty}E(1_AZ_t).$$

显然 $\widetilde{P}$ 是$(\Omega,\mathscr{F}_\infty)$上的测度，而且在任意 $\mathscr{F}_t$ 上 $\mathrm{d}\widetilde{P}\ll\mathrm{d}P$. 把 $\widetilde{P}$ 与 P 限制在 $\mathscr{F}_t$ 上，就有

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{P}}{\mathrm{d}P}(\omega)\bigg|_{\mathscr{F}_t}=Z_t(\omega).$$

2) 设 $\varphi\in\mathscr{F}_s$，而且 $\varphi_u(\omega)=\varphi$ 当 $s\leqslant u\leqslant t$. 由附录命题 0.6 得到

$$\begin{aligned}
&\widetilde{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(X_t-X_s)}|\mathscr{F}_s)\\
&=E\Big(\exp\Big(\mathrm{i}\lambda[(W_t-W_s)-\varphi(t-s)]\\
&\quad+\varphi(W_t-W_s)-\frac{1}{2}(t-s)\varphi^2\Big)\Big|\mathscr{F}_s\Big)\\
&=E\exp\Big[(\mathrm{i}\lambda+x)(W_t-W_s)-\Big(\mathrm{i}\lambda x+\frac{1}{2}x^2\Big)(t-s)\Big]\Big|_{x=\varphi(\omega)}\\
&=\exp\Big[\Big(\frac{1}{2}(\mathrm{i}\lambda+x)^2-\Big(\mathrm{i}\lambda x+\frac{1}{2}x^2\Big)\Big)(t-s)\Big]\Big|_{x=\varphi(\omega)}\\
&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)}.
\end{aligned}$$

3) 设 φ_u 是简单函数，即

$$\varphi_u(\omega)=\sum_r\varphi_{\tau_{r-1}}1_{(\tau_{r-1},\tau_r]}(u)\quad(\varphi_{\tau_r}\in\mathscr{F}_{\tau_r}).$$

这样，对 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$，我们可以算出

$$\begin{aligned}
&\widetilde{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})}\right)\\
&=E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(W_{t_k}-W_{t_{k-1}})-\int_{t_{k-1}}^{t_k}\varphi_u(\omega)\mathrm{d}u}Z_{t_n}(\omega)\right)\\
&=E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k(W_{t_k}-W_{t_{k-1}})-\int_{t_{k-1}}^{t_k}\varphi_u\mathrm{d}u}Z_{t_{n-1}}\right)\\
&\quad\times E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n(W_{t_n}-W_{t_{n-1}})-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\varphi_u\mathrm{d}u}\frac{Z_{t_n}(\omega)}{Z_{t_{n-1}}(\omega)}\middle|\mathscr{F}_{t_{n-1}}\right)\Bigg).
\end{aligned}$$

于是，我们只要证明

$$E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k(W_{t_k}-W_{t_{k-1}})-\int_{t_{k-1}}^{t_k}\varphi_u\mathrm{d}u}\frac{Z_{t_k}(\omega)}{Z_{t_{k-1}}(\omega)}\middle|\mathscr{F}_{t_{k-1}}\right]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda_k^2(t_k-t_{k-1})}. \qquad (8.22)$$

就由归纳法可以得到

$$\widetilde{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2(t_k-t_{k-1})}.$$

也就是在 $\mathrm{d}\widetilde{P}$ 下，$(X_t;t\geqslant0)$是独立增量的高斯系，并且

$$E(X_t-X_s)=0,\ E(X_t-X_s)^2=|t-s|.$$

又由$(X_t;t\geqslant0)$轨道连续，就得证$(X_t;t\geqslant0)$在 $\mathrm{d}\widetilde{P}$ 下是 Brown 运动.

为证(8.22)，只要注意到 φ_u 是简单函数，不妨设它在$(t_{k-1},t_k]$上 $\varphi_u\equiv\varphi\in\mathscr{F}_{t_{k-1}}$(否则可以再细分). (8.22)左边就变成

$$\begin{aligned}
&E\Big(\exp\Big(\mathrm{i}\lambda(W_{t_k}-W_{t_{k-1}})-\varphi(\omega)(t_k-t_{k-1})\\
&\quad+\varphi(\omega)(W_{t_k}-W_{t_{k-1}})-\frac{1}{2}(t_k-t_{k-1})\varphi^2\Big)\Big|\mathscr{F}_{t_{k-1}}\Big).
\end{aligned}$$

于是由 2)的结果，它应为 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda_k^2(t_k-t_{k-1})}$.

4) 对一般有界循序可测的$(\varphi_u(\omega);u\geqslant0)$，取简单循序可测过程$(\varphi_u^{(n)}(\omega);u\geqslant0)$，使

$$E\int_0^t |\varphi_u^{(n)}(\omega) - \varphi_u(\omega)|^2 \mathrm{d}u \to 0.$$

于是
$$E\left|\int_0^t \varphi_u^{(n)}(\omega)\mathrm{d}W_u - \int_0^t \varphi_u(\omega)\mathrm{d}W_u\right|^2 \to 0.$$

因此，不妨设

$$Z_t^{(n)} \triangleq \mathrm{e}^{\int_0^t \varphi_u^{(n)}(\omega)\mathrm{d}W_u - \frac{1}{2}\int_0^t |\varphi_u^{(n)}(\omega)|^2 \mathrm{d}u}.$$

从而

$$Z_t^{(n)} \to Z_t(\omega) \quad (\text{a.e.}\ \mathrm{d}P).$$

又由于

$$\begin{aligned}
E|Z_t^{(n)}|^2 &= E\left(\mathrm{e}^{\int_0^t 2\varphi_u^{(n)}\mathrm{d}W_u - \int_0^t |\varphi_u^{(n)}|^2 \mathrm{d}u}\right) \\
&= E\left(\mathrm{e}^{\int_0^t 2\varphi_u^{(n)}\mathrm{d}W_u - 4\int_0^t |\varphi_u^{(n)}|^2 \mathrm{d}u + 3\int_0^t |\varphi_u^{(n)}|^2 \mathrm{d}u}\right) \\
&\leqslant \left[E\left(\mathrm{e}^{\int_0^t 4\varphi_u^{(n)}\mathrm{d}W_u - \frac{1}{2}\int_0^t |4\varphi_u^{(n)}|^2 \mathrm{d}u}\right) \times E\left(\mathrm{e}^{6\int_0^t |\varphi_u^{(n)}|^2 \mathrm{d}u}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\mathrm{e}^{6L^2 t}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{3L^2 t} < +\infty.
\end{aligned}$$

可见 $Z_t^{(n)}(\omega)$ 对 n 一致可积分. 令

$$X_t^{(n)} = W_t - \int_0^t \varphi_u^{(n)}(\omega)\mathrm{d}u,$$

易见 $X_t^{(n)} \to X_t$；在下式中，令 $m \to \infty$，

$$E\left[Z_t^{(m)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^n \lambda_k (X_{t_k}^{(m)} - X_{t_{k-1}}^{(m)})}\right] = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 (t_k - t_{k-1})},$$

就得到

$$E\left[Z_t(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^n \lambda_k (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})}\right] = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 (t_k - t_{k-1})}.$$

此即需证. ▌

注：在 $\boldsymbol{R}^d$ 中也有 Girsanov 公式，证明完全相仿.

3. 扩散过程的鞅方法简单介绍

在第 2 段中，我们已经看到，在一定条件下

$$\left\{ e^{\int_0^t \varphi_u(\omega)dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t |\varphi_u(\omega)|^2 du}, \mathscr{F}_t \right\} \tag{8.23}$$

是鞅，如果取

$$\varphi_t(\omega) = \lambda\sigma(X_t), \quad X_t = \int_0^t \sigma(X_u)dW_u + \int_0^t b(X_u)du,$$

那么

$$\int_0^t \sigma(X_u)dW_u = X_t - \int_0^t b(X_u)du,$$

于是

$$\left\{ e^{\lambda X_t(\omega) - \lambda\int_0^t b(X_u)du - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t a(X_u)du}, \mathscr{F}_t \right\} \tag{8.24}$$

是鞅（其中 $a(X_u)=|\sigma(X_u)|^2$）。可见，给定了 a,b，它所决定的扩散过程使得(8.24)是鞅. 在 § 8.3 中，我们构造扩散的出发点是已知一个 Wiener 过程$\{W_t,\mathscr{F}_t;t\geqslant0\}$，但是这对构造扩散过程是多余的，我们实际上真正关心的是在 $\Omega=C([0,+\infty)\to\boldsymbol{R}^1)$上构造测度 $P_x(\cdot)$，使得对 $\mathscr{F}_t$(t 以前 $C([0,\infty)\to\boldsymbol{R}^1)$柱集生成的 σ-代数）坐标过程 $X_t(\omega)\triangleq\omega(t)$在 P_x 下满足条件：$X_0=x, X_t\in\mathscr{F}_t$；$\{X_t;t\geqslant0\}$是以 a,b 为系数的扩散过程. 于是，我们自然地将这个问题改为下面的"鞅问题"：在 Ω 上构造测度 $P_x(\cdot)$使得在$(\Omega,\mathscr{F}_\infty,P_x)$上，对$\forall\ \lambda\in\boldsymbol{R}^1$，

$$\left\{ e^{\lambda X_t(\omega) - \lambda\int_0^t b(X_u)du - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t a(X_u)du}, \mathscr{F}_t \right\}$$

是鞅，其中 $X_t(\omega)=\omega(t)$，$\omega=(\omega(t);t\geqslant0)$. 对于多维扩散，鞅问题提法类似.

Stroock 和 Varadhan 引入了上述的鞅问题，并给出了下面的重要定理.

定理 8.17 设 $\boldsymbol{A}(x)=(a_{ij}(x))$的分量连续，$\boldsymbol{b}(x)=(b_i(x))$的分量 Borel 可测，$\forall\ i,j\leqslant d$，并存在 $C>0,\beta_n>0$，使得

$$\sum_{i,j} \xi_i a_{ij}(x) \xi_j \geqslant \beta_n > 0 \quad \left(\forall\ (\xi_i); \sum_i \xi_i^2 \leqslant n\right),$$

$$|a_{ij}(x)| \leqslant C(1 + |x|^2),$$

$$|b_i(x)| \leqslant C(1 + |x|);$$

则关于 $\boldsymbol{A}(x)$,$\boldsymbol{b}(x)$的鞅问题的解存在唯一;任意固定 x 存在唯一 $\Omega = C([0,+\infty) \to \boldsymbol{R}^d)$上的测度 P_x,使得对 $X_t(\omega) \triangleq \omega(t)$,

$$P_x(X_0 = x) = 1.$$

并且对$\forall\ \lambda \in \boldsymbol{R}^d$,

$$\left\{ e^{(\lambda, X_t(\omega) - \int_0^t b(X_u(\omega))du) - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda^T A(X_u(\omega))\lambda du}, \mathscr{F}_t \right\} \tag{8.25}$$

是在$(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P_x)$中的鞅. 进而,$(X_t, \mathscr{F}_t)$对$(\Omega, \mathscr{F}_\infty)$是时齐强马氏过程,它的转移函数是

$$p(t; x, A) = P_x(\omega; X_t(\omega) \in A).$$

((8.25)中的$(\cdot\,,\cdot)$是指 $\boldsymbol{R}^d$ 中的内积.)

定理 8.17 的证明涉及过多技术上的困难,我们这里只能略去.有兴趣的读者可参阅[G].

注:对$\forall\ \lambda \in \boldsymbol{R}^d$,(8.25)是鞅与

$$\left\{ f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_u)du, \mathscr{F}_t \right\} \tag{8.26}$$

对$\forall\ f \in C_0^2$ 是鞅是等价的(L 的定义同前面).因此鞅问题的解也是以 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$ 为系数的扩散过程的一个构造.鞅问题的唯一性定理告诉我们,在定理 8.17 的条件下,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$ 决定了扩散过程的转移函数.

4. 扩散过程的 Girsanov 公式

作为 2,3 两段的应用,我们容易得到:由方程

$$\begin{cases} dX_u = \boldsymbol{\sigma}(X_u)dW_u + \boldsymbol{b}(X_u)du, \\ X_0 = x \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} dX_u = \boldsymbol{\sigma}(X_u)dW_u + \tilde{\boldsymbol{b}}(X_u)du, \\ X_0 = x \end{cases}$$

所决定的扩散过程的测度 P_x 与 $\widetilde{P}_x$，在 $\boldsymbol{A}=\sigma\sigma^T$ 与 $\boldsymbol{b},\widetilde{\boldsymbol{b}}$ 分别都满足定理 8.17 的条件时，若还有

$$|\boldsymbol{\sigma}(x)^{-1}\boldsymbol{b}(x)|\leqslant C,\quad |\boldsymbol{\sigma}(x)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{b}}(x)|\leqslant C,$$

则 $\mathrm{d}P_x$ 与 $\mathrm{d}\widetilde{P}_x$ 相互绝对连续，而且

$$\left.\frac{\mathrm{d}\widetilde{P}_x}{\mathrm{d}P_x}(\omega)\right|_{\mathscr{F}_t}=\mathrm{e}^{\int_0^t(\sigma(X_t)^{-1}(\widetilde{b}(X_t)-b(X_t)))\mathrm{d}W_t-\frac{1}{2}\int_0^t\psi(X_u)\mathrm{d}u},$$

其中

$$\psi(X_u)=(\widetilde{\boldsymbol{b}}(X_u)-\boldsymbol{b}(X_u))^T\boldsymbol{A}(\widetilde{\boldsymbol{b}}(X_u)-\boldsymbol{b}(X_u)).$$

习　　题

1. 设 $(W_t;t\geqslant0)$ 是一维 Brown 运动. 令 $X_t\triangleq W_t^n$. 试求证

$$\mathrm{d}X_t=\int_0^t nW_s^{n-1}\mathrm{d}W_s+\int_0^t\frac{n(n-1)}{2}W_s^{n-2}\mathrm{d}s.$$

2. 试证明当 $|f(t,\omega)|\leqslant C<+\infty$ 时，

$$\left\{\mathrm{e}^{\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}W_s-\frac{1}{2}\int_0^t|f(s,\omega)|^2\mathrm{d}s},\mathscr{F}_t\right\}$$

是鞅，其中 $\mathscr{F}_t=\sigma(W_s;s\leqslant t)$.

3. 试证明在定理 8.12 中取消条件：$a(\cdot)$ 与 $b(\cdot)$ 有界但假定 $EX_0^2<\infty$，唯一性仍然成立.

4. 试求出由下面的随机微分方程的解得到的马氏过程 $\{(X_t,Y_t);t\geqslant0\}$ 的无穷小生成元：

$$\begin{cases}X_t=W_t,\\ Y_t=Y_0+\int_0^t W_u\mathrm{d}u,\end{cases}$$

其中 $Y_0\in\mathscr{F}_0$，$\{W_t,\mathscr{F}_t\}$ 是满足定理 8.12 的条件的 Brown 运动.

5. 在条件 $EZ_t=0$，$EZ_tZ_s=t\wedge s-ts$ 之下求出一个高斯过程 $(Z_t;0\leqslant t\leqslant1)$ 应满足的 Itô 随机微分方程. 又问 Z_t 与 Brown 桥之间有什么联系？

答案：$dZ_t = dW_t - \frac{Z_t}{1-t}dt$.

6. 设 $E\left(\int_s^t f_n(u,\omega)dW_u | \mathscr{F}_s\right) = 0 \quad (t \geqslant s)$，$f_n \in L^2(dP)$，$E|f_n - f|^2 \to 0 (n \to +\infty)$. 试证明 $E\left(\int_0^t f(u,\omega)dW_u | \mathscr{F}_s\right) = 0$.

7. 设 f 一阶连续可微，试证明

$$\int_s^t f(W_u)dW_u = F(W_u) - F(W_s) - \frac{1}{2}\int_s^t f'(W_u)du,$$

其中 F 是 f 的原函数.

8. 设 $\{\varphi(t,\omega); t \in [0,+\infty)\}$ 是对 $\mathscr{F}_t$ 循序可测的过程，$(W_t, \mathscr{F}_t)$ 是 BM^1，而 $E\int_0^{+\infty} |\varphi(u,\omega)|^2 du < +\infty$. 试证明当 $t \to +\infty$，$\int_0^t \varphi(u,\omega)dW_u$ 在 L^2 收敛的意义下有极限.

9. 设 φ_u 为有界循序可测过程，则

$$\xi_t = \exp\left\{\int_0^t \varphi_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t |\varphi_u|^2 du\right\}$$

满足方程

$$\begin{cases} d\eta_t = \eta_t \varphi_t dW_t, \\ \eta_0 = 1. \end{cases}$$

10. (Stratonovich-Fish 对称积分)

设 $\{f(t,\omega); t \geqslant 0\}$ 轨道连续，它与 $\{W_t; t \geqslant 0\}$ 都对 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应. 令

$$\int_0^t f(s,\omega) \circ dW_s \triangleq (p) \lim_{|\Delta t_n| \to 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{f(t_k,\omega) + f(t_{k+1},\omega)}{2} \Delta W_k,$$

其中"$(p) \lim\limits_{|\Delta t_n| \to 0}$"表示依概率收敛，

$$\Delta t_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |t_k - t_{k-1}|, \quad \Delta W_k = W_{t_k} - W_{t_{k-1}}.$$

试证明上述定义合理(极限存在)，并且对 $\forall F \in C^3(\boldsymbol{R}^1)$，

$$F(\eta_t) - F(\eta_s) = \int_s^t F'(\eta_u) f(u,\omega) \circ dW_u,$$

其中 $$\eta_t=\int_0^t f(u,\omega)\cdot \mathrm{d}W_u.$$

11. 试证明 $\xi_t \triangleq \mathrm{e}^{bt}\int_0^t \mathrm{e}^{-bs}\mathrm{d}W_s + x$ 满足随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}\xi_t = \mathrm{d}W_t + b\xi_t \mathrm{d}t,\\ \xi_0 = x,\end{cases}$$

而且 $\{\xi_t;t\geqslant 0\}$ 是一个 Gauss 马氏过程，并求出 ξ 的转移概率密度.

12. 试证明 $\left\{\eta_t = \int_0^t f(u,\omega)\mathrm{d}W_u;u\geqslant 0\right\}$ 是 BM^1，其中 f 满足

1) $\{f(t,\omega);t\geqslant 0\}$ 对 $\{\sigma(W_u;u\leqslant t)\}$ 循序可测；

2) $|f(t,\omega)|=1$.

提示：可先考虑两种简单情况而得到启发：① $f(u,\omega)$ 与 ω 无关，而且是阶梯函数；② $f(u,\omega)$ 是阶梯函数.

13. 设 $B^{(i)} \triangleq \{B_t^{(i)};t\geqslant 0\}(i=1,2)$ 都是对 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应的 BM^1，又设 $\{\varphi(t,\omega);t\geqslant 0\}$ 对 $\{\mathscr{F}_t\}$ 循序可测. 则

$$E\left(\int_0^t \varphi(u,\omega)\mathrm{d}B_u^{(1)} \,\middle|\, \sigma(B^{(2)})\right)=0.$$

14. 设 $\mathrm{d}\xi_t=\sigma(\xi_t)\mathrm{d}W_t+b(\xi_t)\mathrm{d}t$，记 $a(x)=|\sigma(x)|^2$；又设 $\sigma(x),b(x)\in C_b(\boldsymbol{R}^1)$（$C_b$ 指有界连续）；又若

$$f:(\boldsymbol{R}^+,\boldsymbol{R}^1)\to\boldsymbol{R}^1,\ (t,x)\mapsto f(t,x),$$

f 对 t 与 x 分别一阶与二阶连续可导，且

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}a(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b(x)\frac{\partial f}{\partial x}=0.$$

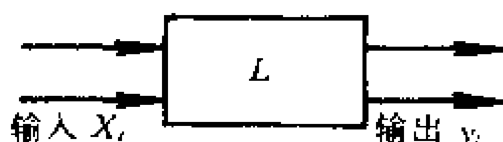
则 $\{\eta_t\triangleq f(t,\xi_t);t\geqslant 0\}$ 对 $\{\mathscr{F}_t\}$ 是鞅.

15. 设 ξ_t 是习题 14 中的扩散过程，f 是具有一致连续的有界的一、二阶导数的有界函数，则 $f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$.

第九章　平稳过程与遍历理论初步

§1　平稳过程的线性理论

1.　线性系统的表示，脉冲响应与频率响应



设有一个信号$\{x_t;t\in T\}$输入一个系统L，而得到输出为$\{y_t;t\in T\}$，记为$y_\cdot=Lx_\cdot$，称系统L是线性的，如果对任意实数α_1,α_2，输入$(x_\cdot^{(1)})$与$(x_\cdot^{(2)})$永远有

$$y_\cdot=L(\alpha_1x_\cdot^{(1)}+\alpha_2x_\cdot^{(2)})=\alpha_1Lx_\cdot^{(1)}+\alpha_2Lx_\cdot^{(2)}.$$

显然微分、积分、线性组合等系统都是线性系统.

为简单起见，考虑$T=\mathbf{Z}$，对$T=\boldsymbol{R}^1$的情况想法类似.

当$x_\cdot=\delta_\cdot(i)\triangleq\{\delta_{ij};j\in\mathbf{Z}\}$，其中$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\0, & i\neq j.\end{cases}$

$$Lx_\cdot=L\delta_\cdot(i)=(\cdots,h_{-1}^{(i)},h_0^{(i)},h_1^{(i)},\cdots)\triangleq h_\cdot(i).$$

由系统的线性，对$\forall\ x_\cdot=\{x_t,t\in\mathbf{Z}\}$，

$$Lx_\cdot=\sum_i x_iL\delta_\cdot(i)=\sum_i x_ih_\cdot(i).$$

如果我们考虑的系统是一个稳定的系统，那么对输入信号作一个时间平移，输出信号也应该是原输出信号同样的时间平移，即这时应有

$$(L\delta_\cdot(i))_t=(L\delta(0))_{t-i},$$

即
$$h_t(i)=h_{t-i}(0).$$

将$h_t(0)$记为h_t，那么

$$(Lx)_t=\sum_k x_kh_{t-k}=\sum_k h_kx_{t-k}.$$

由此我们看到$(h_t;t\in \boldsymbol{Z})$在系统 L 中起着极重要的作用. 又因为$\delta(0)$可以看作时刻 0 来的单位脉冲,因而我们特给 $h=(h_t;t\in \boldsymbol{Z})=L\delta(0)$命名为**脉冲响应函数**——系统 L 对单位脉冲的响应(输出).

当 $T=\boldsymbol{R}^1$ 时,类似的讨论可以得到

$$(Lf)_t=\int f(s)h(t-s)\mathrm{d}s=\int f(t-s)h(s)\mathrm{d}s.$$

当 $T=\boldsymbol{Z}$,输入为 $x_t=\mathrm{e}^{it\lambda}$,输出应为

$$y_t=(Lx.)_t=\sum_k h_k\mathrm{e}^{i(t-k)\lambda}=\Big(\sum_k h_k\mathrm{e}^{-ik\lambda}\Big)\mathrm{e}^{it\lambda}.$$

函数 $H(\lambda)=\sum_k h_k\mathrm{e}^{-ik\lambda}$ 表示频率为 λ 的谐振信号$\{\mathrm{e}^{it\lambda}\}$输入系统 L 后,输出信号的放大倍数,称为**频率响应函数**.

2. 宽平稳过程线性理论的背景

当对一个线性系统 L 输入随机信号时,输出也是一个随机信号,它们之间关系是什么呢?

例 1 若对稳定系统 L,设 $\sum_k h_k^2<+\infty$,输入中混有完全随机的"噪声",它们为相互独立同分布随机变量序列 $\xi\triangleq\{\xi_t(\omega);t\in \boldsymbol{Z}\}$,那么输出中由于随机噪声 ξ 引起的随机信号部分就是

$$y_t(\omega)=\sum_k h_k\xi_{t-k}(\omega).$$

$y\triangleq\{y_t;t\geqslant 0\}$是一个平稳序列. 如果$(\xi_t;t\in \boldsymbol{Z})$是一个不相关的同均值、方差的序列,那么 y 就是一个宽平稳序列.

例 2(随机振动) 设 U,V 是两个互不相关的均值为 0、同方差的随机变量,令

$$x_t=U\cos\lambda t+V\sin\lambda t,$$

那么$\{x_t;t\geqslant 0\}$就是一个宽平稳过程.

证明留给读者自己去做.

例 3(随机电报信号) 设 $\nu\triangleq(\nu(t),t\in \boldsymbol{R}^1)$是 Poisson 过程,$\eta$

是取值为± 1的随机变量，η与ν相互独立，且$E\eta=0$. 令$\xi_t=(-1)^{\nu(t)}\eta$，则$\{\xi_t;t\in \boldsymbol{R}^+\}$是宽平稳过程.

证明 $E\xi_t=E(\eta)E[(-1)^{\nu(t)}]=0$,

$$
\begin{aligned}
E(\xi_t\xi_s)&=E((-1)^{\nu(t)+\nu(s)})\\
&=P(\nu(t)+\nu(s)=\text{偶数})-P(\nu(t)+\nu(s)=\text{奇数})\\
&=P(\nu(t)-\nu(s)=\text{偶数})-P(\nu(t)-\nu(s)=\text{奇数})\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^{2k}}{(2k)!}-\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^{2k+1}}{(2k+1)!}\\
&=\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda(t-s))^k}{k!}=\mathrm{e}^{-2\lambda(t-s)}.
\end{aligned}
$$

可见$\{\xi_t;t\geqslant 0\}$宽平稳.

这类宽平稳的信号在调频电子系统中常常出现.

命题 9.1 如果稳定线性系统L的脉冲响应函数h满足条件

$$\iint|h(r)h(s)|\mu(\mathrm{d}r)\mu(\mathrm{d}s)<+\infty\ (\mu\text{ 为一个测度}),$$

则一个二元可测宽平稳信号通过L后，输出仍然是宽平稳的.

证明 对$\forall\ \omega\in\Omega$，按轨道考虑. 令

$$(L\xi_\cdot)_t\triangleq\int h(r)\xi_{t-r}(\omega)\mu(\mathrm{d}r).$$

由于$E\xi_t=\mathrm{const}$，$E(\xi_t\xi_s)=R(t-s)$，我们有

$$
\begin{aligned}
&E\left|\int h(r)\xi_{t-r}(\omega)\mu(\mathrm{d}r)\right|^2\\
&\quad\leqslant\iint|h(r)h(s)||E(\xi_{t-r}\xi_{t-s})|\mu(\mathrm{d}r)\mu(\mathrm{d}s)\\
&\quad\leqslant\iint|h(r)h(s)|\mu(\mathrm{d}r)\mu(\mathrm{d}s)E|\xi_t|^2<+\infty;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\int h(r)\xi_{t-r}(\omega)\mu(\mathrm{d}r)&=\int E(\xi_{t-r})h(r)\mu(\mathrm{d}r)\\
&=E(\xi_t)\int h(r)\mu(\mathrm{d}r);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left(\int h(r)\xi_{t-r}(\omega)\mu(\mathrm{d}r)\int h(s)\xi_{t-s}(\omega)\mu(\mathrm{d}s)\right)
&= \iint h(r)h(s)E(\xi_{t-r}\xi_{\tau-s})\mu(\mathrm{d}r)\mu(\mathrm{d}s) \\
&= \iint h(r)h(s)R(t-\tau-r+s)\mu(\mathrm{d}r)\mu(\mathrm{d}s).
\end{aligned}
$$

可见 $E(L\xi.)_t$ 与 t 无关，$E((L\xi.)_t(L\xi.)_\tau)$ 只与 $t-\tau$ 有关，即 $L\xi.$ 宽平稳. ▌

宽平稳过程的线性理论给随机宽平稳信号通过线性系统的变化的研究，以及为达到某种目的(例如压制干扰突出信号)的线性系统设计提供了理论基础与处理原则. 宽平稳过程的线性理论从数学上看，就是将过程放在 $L_2(\mathrm{d}p)$ 中去考查研究.

3. Hilbert 空间中的宽平稳序列

设 $\xi \triangleq (\xi_n, n\in \mathbf{Z})$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 中的宽平稳序列，ξ 通过任何线性系统 L 在时刻 m 的输出 $(L\xi.)_m$ 就都在 $\{\xi_n; n\in\mathbf{Z}\}$ 的线性闭包中. 而后者恰为复 $L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的一个闭子空间(记为 H^ξ). 如果把 $\{\xi_n;\mathbf{Z}\}$ 放到 H^ξ 中去考虑，我们就可以利用许多有关 Hilbert 空间的结果，从而获得有力的工具.

在 H^ξ 中的内积 $(x,y)=E(x-Ex)(\overline{y}-E\overline{y})$，$\|x\|^2=E|x-Ex|^2$. 以后不失一般性，我们总假定 $Ex=0$.

H^ξ 中线性算子 $U: H^\xi\to H^\xi$，使 $U\xi_n=\xi_{n+1}$ 称之为 ξ 决定的推移算子(这里的 U 就是在 12 页中的推移算子 θ_1).

命题 9.2 线性算子 U 是 H^ξ 上的一个酉算子，而且 $\xi_n=U^n\xi_0$.

证明 由 $E|U\xi_n-U\xi_m|^2=E|\xi_n-\xi_m|^2$，可见 U 是 $H^\xi\to H^\xi$ 的酉算子，而且 $\xi_n=U^n\xi_0$.

反之，任给 H^ξ 上的一个酉算子 U，令

$$\eta_n = U^n\eta_0(\eta_0\in H^\xi)\ (n=0,1,\cdots),$$

则 $\{\eta_n; n\geqslant 0\}$ 是一个宽平稳序列. ▌

这样，由泛函分析中关于酉算子的谱分解定理，我们可以得到

$$U = \int_{\pi}^{\pi} e^{i\lambda} dE(\lambda),$$

其中 $E(\lambda)$是谱族(即 $E(\lambda)$是 H^{ξ} 上的射影算子，满足

$$E(-\pi) = 0, \quad E(\pi) = I, \quad E(\lambda)E(\mu) = E(\lambda \wedge \mu).$$

令

$$Z(\lambda,\omega) = E(\lambda)\xi_0,$$

于是 Z 应有以下性质：

(Z_1)(正交增量)　对$\forall\ \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4$,

$$E((Z(\lambda_4,\omega) - Z(\lambda_3,\omega))(Z(\lambda_2,\omega) - Z(\lambda_1,\omega)) = 0.$$

这是因为

$$\begin{aligned}
\text{左式} &= E((E(\lambda_4)\xi_0 - E(\lambda_3)\xi_0)(E(\lambda_2)\xi_0 - E(\lambda_1)\xi_0)) \\
&= (E(\lambda_4)\xi_0, E(\lambda_2)\xi_0) - (E(\lambda_3)\xi_0, E(\lambda_2)\xi_0) \\
&\quad - (E(\lambda_4)\xi_0, E(\lambda_1)\xi_0) + (E(\lambda_3)\xi_0, E(\lambda_1)\xi_0) \\
&= (\xi_0, E(\lambda_2)\xi_0) - (\xi_0, E(\lambda_2)\xi_0) \\
&\quad - (\xi_0, E(\lambda_1)\xi_0) + (\xi_0, E(\lambda_1)\xi_0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(Z_2)　$R(h) \triangleq E(\xi_{t+h}\xi_t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda h} dF(\lambda)$，其中

$$F(\lambda) = \| Z(\lambda,\omega) \|^2 = (E(\lambda)\xi_0, \xi_0).$$

这是因为当信号为实的，$\xi_t = \bar{\xi}_t$.

$$\begin{aligned}
R(h) &= E(\xi_{t+h}\bar{\xi}_t) \\
&= \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-h)\lambda} dE(\lambda)\xi_0, \int_{\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dE(\lambda_0)\xi_0 \right) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} d(E(\lambda)\xi_0, \xi_0) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} dF(\lambda).
\end{aligned}$$

从而，我们可以得到下面的宽平稳序列的谱定理.

命题 9.3　设$(\xi_n, n \in Z)$是宽平稳序列，则存在过程$\{Z(\lambda,\omega);\lambda \in [-\pi,\pi]\}$满足$(Z_1)$(称为正交增量过程)，使得

$$\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dZ(\lambda,\omega), \tag{9.1}$$

并且 $$R(h) \triangleq E(\xi_{t+h}\xi_t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda h} dF(\lambda).$$

推论(Herglotz 定理) 对任意一个正定函数 $R(\cdot)$(即 R 是满足下面条件的函数:对$\forall\ x_k \in \mathbf{R}^1, \forall\ n, t_k \in \mathbf{Z}(k=1,2,\cdots,n)$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j R(t_i - t_j) \geqslant 0),$$

必存在$[-\pi,\pi]$上的测度 $dF(\lambda)$,使得

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dF(\lambda). \tag{9.2}$$

证明 由 $R(\cdot)$,可构造一个平稳高斯过程 ξ_t 使 $E\xi_t=0$,并以 $R(\cdot)$为相关函数:$E(\xi_{t+n}\xi_t)=R(n)$. 于是利用谱分解定理得到 $F(\lambda)=\|Z(\lambda,\omega)\|^2$,而且

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dF(\lambda). \blacksquare$$

注:事实上,这个推论与命题 9.3 等价.

类似地,由酉半群的 Stone 定理,我们可以得到以下谱分解定理.

命题 9.4 设$(\xi_t; t \in \mathbf{R}^1)$是均方连续的宽平稳过程(即 $E|\xi_t-\xi_{t+s}|^2 \to 0$,当 $s \to 0$),则必存在$(\mathbf{R}^1,\mathscr{B}^1)$上的正交增量过程$(Z(\lambda,\omega);\lambda \in \mathbf{R}^1)$(即 Z 应满足(Z_1)),使得

$$\xi_t = \int_{\mathbf{R}^1} e^{i\lambda t} dZ(\lambda,\omega), \tag{9.3}$$

并且

$$R(h) = E(\xi_{t+h}\xi_t) = \int_{\mathbf{R}^1} e^{i\lambda h} dF(\lambda),$$

其中 dF 是如下定义的测度

$$F([\lambda,\mu)) = E|Z(\mu,\omega) - Z(\lambda,\omega)|^2.$$

证明 只需验证酉算子群 U^t 是强连续的. 事实上,

$$\|U^t f - U^s f\|^2 = E|U^t f - U^s f|^2.$$

当 $f=\xi_s(s\in\boldsymbol{R}^1)$时,$U^t f=\xi_{t+s}$,$U^u f=\xi_{u+s}$,于是

$$E|U^t f-U^u f|^2=E|\xi_{t+s}-\xi_{u+s}|^2\quad(t,u\in\boldsymbol{R}^1)$$
$$=E|\xi_t-\xi_u|^2\to 0\quad(\text{当 } t-u\to 0).$$

因此,对$\forall\ f\in H^\xi$,有

$$E|U^t f-U^u f|^2\to 0\quad(t-u\to 0).$$

于是 U^t 是强连续的. 利用 Stone 定理与命题 9.3 类似就能得到

$$Z(\lambda,\omega)=E(\lambda)\xi_0.\ \blacksquare$$

推论(Khinchin-Bochner 定理) 给定原点连续的非负定函数 $\{R(h);h\in\boldsymbol{R}^1\}$,必存在$(\boldsymbol{R}^1,\mathscr{B}^1)$上的测度 $\mathrm{d}F(\lambda)$使得

$$R(h)=\int_{\boldsymbol{R}^1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda h}\mathrm{d}F(\lambda).\tag{9.4}$$

证明留给读者.

注:这个推论与命题 9.4 等价.

谱分解定理使我们在 H^ξ 与 $L_2(\mathrm{d}F(\lambda))$间建立了一个同构 ν:

$$H^\xi\overset{\nu}{\longleftrightarrow}L_2(\mathrm{d}F(\lambda));\quad \xi_t\overset{\nu}{\longleftrightarrow}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t};$$

$$Z(\lambda,\omega)\overset{\nu}{\longleftrightarrow}F(\lambda)=(E(\lambda)\xi_0,\xi_0);$$

$$(\xi_s,\xi_t)\overset{\nu}{\longleftrightarrow}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(s-t)}\mathrm{d}F(\lambda);$$

$$\eta=\int f(\lambda)\mathrm{d}Z(\lambda,\omega)\overset{\nu}{\longleftrightarrow}f(\lambda);$$

$$\int_A\mathrm{d}Z(\lambda,\omega)\overset{\nu}{\longleftrightarrow}\int_A\mathrm{d}F(\lambda),\ A\subset\boldsymbol{R}^1\ \text{可测},$$

而且

$$\left(\int_{\boldsymbol{R}^1}f(\lambda)\mathrm{d}Z(\lambda,\omega),\int_{\boldsymbol{R}^1}g(\lambda)\mathrm{d}Z(\lambda,\omega)\right)=\int_{\boldsymbol{R}^1}f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}Z(\lambda).\tag{9.5}$$

这就说明 ν 的确是一个同构.

在实际问题中,往往称 $\mathrm{d}F(\lambda)$为**功率谱测度**. 如果 $\mathrm{d}F(\lambda)\ll\mathrm{d}\lambda$,那么 $F(\lambda)=f(\lambda)\mathrm{d}\lambda$,称 $f(\lambda)$为**功率谱密度**. 这是因为粗略直观

地讲，平稳过程(ξ_t)的谱分解就是把ξ_t看成不同频率的且有随机振幅的简谐振动信号的"叠加"：

$$\int e^{i\lambda t} dZ(\lambda,\omega) \approx \sum_k e^{i\lambda_k t} \Delta Z_k ,$$

而且

$$\begin{aligned} E|\Delta Z_k|^2 &= E|Z(\lambda_k+\Delta,\omega) - Z(\lambda_k,\omega)|^2 \\ &= F(\lambda_k+\Delta) - F(\lambda_k) = \Delta F_{\lambda_k} \end{aligned}$$

正是以λ为频率的分量的振幅的均方值，也即它是平均功率. 这就是$dF(\lambda)$称为功率谱测度的原因.

4. 最佳估计与线性预测

设有某随机变量η及一族可观测的随机变量族$\xi \triangleq \{\xi_t; t \in T\}$. 现在，我们要求得到由$\xi$给出的$\eta$的"最佳"估计. 当然，对不同的问题，应该采取不同的最佳标准. 一种适用范围很广而方便的标准是：最小均方误差标准. 即找出$\hat{\eta} \in \sigma(\xi)$，使得

$$E|\eta - \hat{\eta}|^2 \leqslant E|\eta - \zeta|^2 \quad (\forall\, \zeta \in \sigma(\xi)).$$

显然，只有当$E|\eta|^2 < +\infty$，才可能采取这种标准，而且这时由于对$\forall\, \zeta \in \sigma(\xi)$，$E|\zeta|^2 \leqslant 2(E|\zeta-\eta|^2 + E|\eta|^2)$，显然

$$\min_{\zeta \in \sigma(\xi)} E|\eta - \zeta|^2 = \min_{\zeta \in L^2(\sigma(\xi), dP)} E|\eta - \zeta|^2.$$

由附录 I 命题 0.7 与 0.8，我们立刻看到

$$\hat{\eta} = E(\eta|\sigma(\xi)) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\xi_{t_1}, \cdots, \xi_{t_{k(n)}}). \tag{9.6}$$

这正是非线性滤波(估计)等问题的基点. 然而由(9.6)给出$\hat{\eta}$的显式表示，即具体给出φ_n与$t_1, \cdots, t_{k(n)}$并非易事. 非线性滤波(估计)理论正是研究怎样根据具体情况去给出它们的算法.

由于非线性滤波计算与实现起来都非常困难，很多情况下我们宁可牺牲一点精度，求其计算与实现的简化. 最自然而简单的方案是通过一个线性系统L，由ξ得到η的最佳线性估计. 即在ξ中的元素的线性组合中求最小均方估计. 也就是求$\hat{\eta} \in H^{\xi}$(而不是

$\in \sigma(\xi)$，其中 $H^{\xi}=\mathscr{L}(\xi)=\xi$ 在$L_2(\mathrm{d}P)$中的线性闭包)，使

$$E|\eta-\hat{\eta}|^2=\min E|\eta-\zeta|^2,\ \zeta\in\mathscr{L}(\xi).$$

这样

$$\hat{\eta}=\mathrm{Proj}_{H^{\xi}}\,\eta. \tag{9.7}$$

于是问题就化为求 η 在 H^{ξ} 中的投影. 和前面非线性估计问题一样，我们要求能给出(9.7)右端的可行算法. 这就需要对具体问题具体分析.

例 4 (线性预测)　设 $\xi\triangleq\{\xi_n;n\in\boldsymbol{Z}\}$是一个宽平稳序列，以$\{R(n);n\in\boldsymbol{Z}\}$为相关函数. 若我们已经掌握了 ξ. 在时刻 N 以前的资料，而希望预测 ξ_{N+m}，即形式地求

$$\zeta_{N+m}=\sum_{n=0}^{\infty}h_n\xi_{N-n}$$

使得

$$E|\xi_{N+m}-\zeta_{N+m}|^2=\min. \tag{9.8}$$

假定 $R(n)=\int_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\lambda}\mathrm{d}\lambda$，其中功率谱密度 $f(\lambda)$存在并具有形式

$$f(\lambda)=\Big|\sum_{k=0}^{\infty}c_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\lambda}\Big|^2\quad(c_k\in\boldsymbol{R}^1). \tag{9.9}$$

为突出实质，我们还增加假定 $f(\lambda)>0$，于是可设

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda k}\Big)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}d_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\lambda}. \tag{9.10}$$

那么，最优预测公式可用 c_k 写出. 下面我们形式地求$\{h_n\}$的具体表示式. 令

$$H(\lambda)\triangleq\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\lambda}h_n.$$

于是由 $\xi_{N+m}-\zeta_{N+m}\perp\{\xi_n;n\leqslant N\}$，利用 3 段中的同构关系在 $L_2(\mathrm{d}f(\lambda))$中对应得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N+m)\lambda}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\lambda}H(\lambda))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N-n)\lambda}f(\lambda)\mathrm{d}\lambda=0\ (n\geqslant 0).$$

可见$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\lambda}-H(\lambda))f(\lambda)$的富氏级数展开式中 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\lambda}$的系数全是 0，因

而其展开式形式地应为

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\lambda}-H(\lambda))f(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\lambda}.$$

将(9.9),(9.10)代入上式,就得到

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\lambda}-H(\lambda))\sum_{n=0}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\lambda}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}d_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\lambda}\Big);$$

即

$$H(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\lambda}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\lambda}-\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\lambda}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_kd_{n-k}\Big).$$

比较两边系数就得到(等式两边 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\lambda}(k>0)$ 的系数均为 0)

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\lambda}\Big)H(\lambda)=\sum_{n=m}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)\lambda}.$$

即

$$H(\lambda)=\frac{\sum\limits_{n=m}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)\lambda}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\lambda}}=\sum_{n=m}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}d_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\lambda}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}c_{j+m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}d_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\lambda}\Big(\sum_{j=0}^{n}c_{j+m}d_{n-j}\Big).$$

所以 $h_n=\sum\limits_{j=0}^{n}c_{j+m}d_{n-j}$. 这时预报均方误差是

$$\begin{aligned}\sigma^2&=\int_{-\pi}^{\pi}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\lambda}-H(\lambda)|^2f(\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=\int_{-\pi}^{\pi}|c_0+c_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda}+\cdots+c_{m-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m-1)\lambda}|^2\mathrm{d}\lambda\\&=2\pi(|c_0|^2-\cdots+|c_{m-1}|^2).\end{aligned}$$

由解析函数边界性质可得到:形如(9.9)的分解成立当且仅当

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(\lambda)\mathrm{d}\lambda>-\infty.$$

例 5 在例 4 中,当 $\mathrm{d}F(\lambda)\ll\mathrm{d}\lambda$,而且

$$f(\lambda)=\frac{1}{|1-\rho e^{-i\lambda}|^2}=\frac{1}{(1-\rho e^{-i\lambda})\overline{(1-\rho e^{-i\lambda})}}$$

$$=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n e^{-in\lambda}\right|^2 \quad (0<\rho<1),$$

而且
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n e^{in\lambda}\right)^{-1}=1-\rho e^{i\lambda},$$

即
$$c_n=\rho^n,\ d_0=1,\ d_1=-\rho,\ d_n=0\quad(n\geqslant 2).$$

于是这时

$$\hat{\xi}_{N+m}=\rho^m\xi_N\quad(m\geqslant 1).$$

若$(\xi_n;n\in \mathbf{Z})$又是高斯系，$E\xi_k=0$，那么

$$E(\xi_k-\rho\xi_{k-1}|\mathscr{F}_{k-1})=\hat{\xi}_k-\rho\xi_{k-1}=0=E(\xi_k-\rho\xi_{k-1}).$$

可见$\xi_k-\rho\xi_{k-1}$与$\mathscr{F}_{k-1}$独立，于是

$$E(e^{i\lambda(\xi_k-\rho\xi_{k-1})}|\mathscr{F}_{k-1})=E(e^{i\lambda(\xi_k-\rho\xi_{k-1})}).$$

这样
$$E(e^{i\lambda\xi_k}|\mathscr{F}_{k-1})=e^{i\lambda\rho\xi_{k-1}}E(e^{i\lambda(\xi_k-\rho\xi_{k-1})}).$$

右边对ξ_{k-1}可测，于是

$$E(e^{i\lambda\xi_k}|\mathscr{F}_{k-1})=E(e^{i\lambda\xi_k}|\xi_{k-1})).$$

这样$\{\xi_n,n\in \mathbf{Z}\}$是一个高斯平稳马氏过程.

一般地，若$\hat{\xi}_t\triangleq \mathrm{Proj}_{H_{t-1}^{\xi}}\xi_t=\rho\xi_{t-1}$，其中$H_{t-1}^{\xi}\triangleq\mathscr{L}(\xi_{t-s};s\geqslant 1)$，则称宽平稳过程$(\xi_n;n\in \mathbf{Z})$是马氏型的. 注意马氏型的过程并不一定是马氏过程；而马氏过程也不一定是马氏型的. 仅对高斯过程它们才一致.

例 6(滤波问题)　设有信号s_t在干扰$n_t(\omega)$下被接收，因此我们实际收到的是$\xi_t=s_t+n_t$. 现在要想尽量地从噪声(n_t)的干扰中"恢复"出有用信号(s_t)，这就是滤波. 如果要求滤波器是一个稳定线性系统，那么上面的问题用估计的语言来讲就是要找$\hat{s}_t\in\mathscr{L}(\xi_t;t\in \mathbf{Z})$使得

$$E(\hat{s}_t-s_t)^2\Longrightarrow \min.$$

如果$s_t,n_t\in L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$，那么上面的问题就可化为求

$$\hat{s}_t=\mathrm{Proj}_{H^{\xi}}(s_t)$$

的具体线性表达式的问题了.

一般地,以一个过程(ξ_t)的线性组合及极限来估计另一个过程的问题称为线性滤波.

例 7(Wiener 滤波) 如果干扰过程$(n_t, t\in \mathbf{R}^1)$与信号s_t相互独立,都是平稳的,并分别有谱密度$f_{nn}(\lambda)$与$f_{ss}(\lambda)$,则最佳过滤是

$$\hat{s}_t = \mathrm{Proj}_{H^\xi} s_t = \int e^{i\lambda t} g_0(\lambda) dE(\lambda)\xi_0,$$

其中
$$g_0(\lambda)=\frac{f_{ss}(\lambda)}{f_{ss}(\lambda) f_{nn}(\lambda)}.$$

证明 注意到当(s_t)与(n_t)独立,应有

$$f_{\xi s}(\lambda) = f_{ss}(\lambda) \quad \left(\int e^{i\lambda t} f_{\xi s}(\lambda) d\lambda = E(\xi_{t+u} s_u) \right)$$

与
$$f_{\xi\xi}(\lambda)=f_{ss}(\lambda)+f_{nn}(\lambda).$$

此外,对于$\forall\ \hat{s}_t=\int e^{i\lambda t} g(\lambda) dE(\lambda_0)\xi_0 \in H^\xi$,有

$$f_{\hat{s}\hat{s}}(\lambda) = |g(\lambda)|^2 f_{\xi\xi}(\lambda),$$
$$f_{\hat{s}s} = g(\lambda) f_{\xi s}(\lambda) = g(\lambda) f_{ss}(\lambda).$$

于是

$$\begin{aligned}
Q &\triangleq E(|\hat{s}_t - s_t|^2) \\
&= \int (f_{\hat{s}\hat{s}}(\lambda) - f_{\hat{s}s}(\lambda) - f_{s\hat{s}}(\lambda) + f_{ss}(\lambda)) d\lambda \\
&= \int [\,|g(\lambda)|^2 f_{\xi\xi} - (g(\lambda) + \overline{g(\lambda)}) f_{ss} + f_{ss}(\lambda)] d\lambda \\
&= \int \left(f_{\xi\xi}(\lambda) \left| g(\lambda) - \frac{f_{ss}(\lambda)}{f_{\xi\xi}(\lambda)} \right|^2 + f_{ss}(\lambda) - \frac{|f_{ss}(\lambda)|^2}{f_{\xi\xi}(\lambda)} \right) d\lambda \\
&\geqslant \int \left(f_{ss}(\lambda) - \frac{f_{ss}^2(\lambda)}{f_{\xi\xi}(\lambda)} \right) d\lambda.
\end{aligned}$$

显然取

$$g_0(\lambda) = \frac{f_{ss}(\lambda)}{f_{\xi\xi}(\lambda)} = \frac{f_{ss}(\lambda)}{f_{ss}(\lambda) + f_{nn}(\lambda)}$$

时Q达到最小,即令$\hat{s}_t=\int e^{i\lambda t} g_0(\lambda) dE(\lambda)\xi_0$. 将$g_0(\lambda)$展开成富氏级

数，就可得到类似例 6 中的滤波公式.

§2 平稳过程、保测变换与遍历论初步

1. 平稳过程、保测变换与遍历论的基本问题

考虑概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$.

定义 9.1(可测变换) 映射$T:\Omega\to\Omega$称为可测变换，如果对$\forall A\in\mathscr{F}$，有$T^{-1}A\in\mathscr{F}$，其中$T^{-1}A\triangleq\{\omega;T\omega\in A\}$.

定义 9.2(保测变换) 可测变换T称为P的保测变换，如果对$\forall A\in\mathscr{F}$有

$$P(T^{-1}A)=P(A).$$

命题 9.5 若有π系集类$\mathscr{B}\subset\mathscr{F}_0$，且$\sigma(\mathscr{B})=\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}$. 又设对$\forall A\in\mathscr{B}$，$P(T^{-1}A)=P(A)$，则$T$是$(\Omega,\mathscr{F}_0,P)$上的保测变换.

证明 令

$$\widetilde{\mathscr{F}}\triangleq\{A\in\mathscr{F}_0;P(T^{-1}A)=P(A)\}.$$

由测度的性质，显然$\widetilde{\mathscr{F}}$是一个σ-代数，又由$\mathscr{B}\subset\widetilde{\mathscr{F}}$立得

$$\mathscr{F}_0=\sigma(\mathscr{B})\subset\widetilde{\mathscr{F}}\subset\mathscr{F}_0. \blacksquare$$

在第三章中，我们已经看到：一个具有正常返类的马氏链ξ，若其初分布恰为某一个不变概率测度(这时它一定存在)，我们可以将ξ理解为

$$(\Omega,\mathscr{F},P)=(\mathscr{S}^{\mathbb{Z}^+},\sigma(\text{全体有限维柱集}),P)$$

上的坐标过程$\xi_n(\omega)=\omega_n$(其中$\omega=(\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n,\cdots)$)，而且它是平稳的. 对任意$\omega=(\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n,\cdots)\in\Omega=\mathscr{S}^T$，令

$$T\omega\triangleq(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n+1},\cdots),$$

$$\mathscr{B}\triangleq\{A=\{\omega;\omega_{n_1}=i_1,\omega_{n_2}=i_2,\cdots,\omega_{n_k}=i_{n_k}\}\}.$$

则对

$$\forall A=\{\omega;\omega_{n_1}=i_1,\omega_{n_2}=i_2,\cdots,\omega_{n_k}=i_{n_k}\}\in\mathscr{B},$$

$$P(T^{-1}A)=P\{\omega;\omega_{n_1+1}=i_1,\omega_{n_2+1}=i_2,\cdots,\omega_{n_k+1}=i_{n_k}\}$$

$$= P\{\omega; \xi_{n_1+1}(\omega) = i_1, \xi_{n_2+1}(\omega) = i_2, \cdots, \xi_{n_k+1}(\omega) = i_{n_k}\}$$

$$\xlongequal{\xi\text{平稳}} P\{\omega; \xi_{n_1}(\omega) = i_1, \xi_{n_2}(\omega) = i_2, \cdots, \xi_{n_k+1}(\omega) = i_{n_k}\}$$

$$= \boldsymbol{P}(A).$$

可见 T 在 $\mathscr{B}$ 上保测. 由命题 9.5, T 在 $\sigma((\mathscr{B}) = \mathscr{F}_0$ 上保测. ▌

一般地, 任意一个平稳序列可以定义一个新概率空间及其上与它同分布的坐标过程. 于是如同前面对马氏链一样, $\Omega = \mathscr{S}^{Z^+}$ 上的推移算子 T:

$$T\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n+1}, \cdots), \quad \omega = (\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n, \cdots)$$

就是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的保测变换(其中 $\mathscr{F}$ 是由全体有限维柱集生成的 σ-代数, P 是由该平稳序列决定的 $\mathscr{F}$ 上的分布测度). 反之, 若存在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的保测变换及可测函数 f, 则令 $\xi_t(\omega) = f(T^n\omega)$, $\xi \triangleq \{\xi_t(0); t \in \boldsymbol{Z}^+\}$ 就定义了 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一个平稳序列. 从这个意义上, 平稳序列与保测变换可视为等同.

在第三章我们已经看到一个正常返不可约马氏链概率为 1 地有

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n\omega) = Ef(\omega) \quad (\text{当 } f(\omega) = f(\xi_{t_1}(\omega), \cdots, \xi_{t_n}(\omega))). \tag{9.11}$$

但是当马氏链具有两个以上正常返类, 而初分布又在这些正常返类上都有负荷(取正测度)时, (9.11)就不再成立. 这是一类很重要的问题. 下面让我们对此先给出一个直观的描述.

设有 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的保测变换 $T: \Omega \to \Omega$. 对 $\forall\ \omega \in \Omega$, 我们称 $\{T^n\omega; n \in \boldsymbol{Z}^+\}$ 是由 T 决定的发展系统从 ω 出发的轨道. 当 T^{-1} 有意义时, 也可考虑轨道 $\{T^n\omega; n \in \boldsymbol{Z}\}$(它表示系统从无穷远的过去到无穷远的将来的发展全过程). 又若有可测函数 $f: \Omega \to \boldsymbol{R}^1$, 我们可以把它理解为在系统中的一个可观测量. 于是, $\{f(\omega), f(T\omega), \cdots, f(T^n\omega), \cdots\}$ 就可以看作一系列相继时刻对系统的某观测值. 在统计力学、信息论、控制论、识别等入场多领域中, 人们普遍关心

的一个问题是这列观测值在长时间内的平均值

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(T^n\omega) \tag{9.12}$$

当 N 充分大时的渐近行为. 换句话说,就是它是否存在某种意义下的极限,此极限又该是怎样的,是什么. 其中一个最引人注意的问题是:时间平均值(9.12)是否渐近于空间平均

$$Ef(\omega)=\int f(\omega)\mathrm{d}P(\omega).$$

早在本世纪初就有独立同分布列的强大数律,它解决了$\{f(T^k\omega);k=0,1,2,\cdots\}$相互独立同分布这一特殊情形下的上述问题. 此后 Von Newman 与 Birkhoff 对一般情况分别在均方收敛意义下(均方遍历定理)与几乎处处收敛意义下(个别遍历定理)解决了极限的存在性. 前者正是泛函分析中半群算子的 Von Newman 遍历定理,其证明思想与我们第三章中给出的马氏链的弱遍历定理类似,我们在此不讨论它了;后者正是本节的主要定理.

至于时间平均渐近于空间平均这一问题,显然,一般来说答案是否定的. 问题在于:在什么条件下它应该成立. 这就成了遍历论的另一个重要的论题. 为此,人们引出了一系列概念,下面我们给出其中最重要的几个.

定义 9.3(不变集) 对 $A\in\mathscr{F}$,A 称为 T 的强不变集,如果 $T^{-1}A=A$;称 A 为 T 的不变集,如果 $P(A\triangle T^{-1}A)=0$.

定义 9.4(遍历) 保测变换 T 称为遍历的,若任何不变集 A 都有 $P(A)=0$ 或 1.

定义 9.5(强混合) 保测变换 T 称为强混合的,若任何 $A,B\in\mathscr{F}$,

$$\lim_{n\to\infty}P(AT^{-n}B)=P(A)P(B).$$

从字面上看强混合性意味着$\forall$ A 与 $T^{-n}B$ 渐近独立. 从强混合的定义还可以给出下面的直观解释:从任一集(可测)A 出发,经过时间 n 而映入每一个集合 B 的点的测度与该集合 B 的测度的

比例应与 A 的测度渐近成比例，这就是开始不妨把 A 中元素用红色标上，这就好似一滴红墨水在清水 Ω 中，经过 n 次推移后，红墨水与清水均匀混合了. 这也就是强混合这一名词的来源.

命题 9.6 若 T 强混合，则遍历.

证明 设 A 是不变集，则 $P(A\triangle T^{-n}A)=0$；另一方面，

$$\lim_{n\to\infty}P(A\cap T^{-n}A)=P(A)P(A).$$

于是

$$\begin{aligned}(P(A))^2&=\lim_{n\to\infty}[P(A\cap T^{-n}A)+P(A\triangle T^{-n}A)]\\&=\lim_{n\to\infty}P(A\cup T^{-n}A)\geqslant P(A)\\&\geqslant\lim_{n\to\infty}P(A\cap T^{-n}A)=(P(A))^2.\end{aligned}$$

即 $(P(A))^2=P(A)$. 所以 $P(A)=0$ 或 1. ▌

由命题 9.6 可见：强混合是比遍历更强的性质. 下面我们给出一个遍历而不强混合的例子.

考虑一个以 $d(\geqslant 2)$ 为周期的不可约平稳马氏链 $\xi=\{\xi_n;n\in\mathbf{Z}^+\}$（不妨设它是坐标过程）. 于是

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(\xi_n(\omega))\to\sum\pi_i f(i),$$

其中 $\{\pi_i\}$ 是 ξ 的不变测度. 但是由于 $\{p_{ij}(0)\}$ 是以 d 为周期的函数，所以

$$\begin{aligned}&P(T^{-n}\{\omega;\xi_0(\omega)=j\}\cap\{\xi_0(\omega)=i\})\\&\quad=P(\omega;\xi_n(\omega)=j,\xi_0(\omega)=i)\\&\quad=\pi_i P_{ij}(n)\not\to\pi_i\pi_j\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

遍历究意味着什么呢？下段的命题 9.9 比较清楚地回答了这一问题，上面例子中马氏链的遍历性也可由它得到.

遍历论发展的一个里程碑是 Kolmogorov 向它引入熵与拓扑熵. 自此熵不仅成功地用来解决了一系列测度空间与保测变换的同构等价问题，而且熵的概念对系统的复杂性、随机性、信息量等一系列不同领域中的重要问题都是一个很好的刻画工具. 在本节

第 3 段我们简单介绍熵的概念. 对它与遍历论在各重要方向的关系及在其它学科的应用请参考[Pe],[Wt],[B1],[M]等著作.

遍历论发展至今已成为一个独立的迅速发展的数学分支. 在微分动力体系的研究中,遍历论是最重要课题之一. 遍历论还在统计物理、物理化学、计算机科学以至生物学、医学等学科中有重要的应用. 本节不过给出一个最粗浅的介绍而已.

2. Birkhoff 个别遍历定理与最大遍历定理

定理 9.7(Birkhoff 遍历定理) 设 T 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的保测变换,$f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$. 则$\exists$ $f^*\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$,使得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(T^n\omega)=f^*(\omega)\ (\text{a.e. d}P),\tag{9.13}$$

而且
$$f^*(\omega)=E(f(\omega)\mid\mathscr{I})\in\mathscr{I},$$
其中 $\mathscr{I}=\{A;A$ 是不变集$\}$为不变 σ-代数.

注: 定理 9.7 中(9.13)对 σ 有限测度 P 也成立.

推论 1 当 T 遍历,则 $f^*(\omega)=E(f(\omega))$ (a.e. dP).

证明 由于

$$\int f^*\text{d}P=\int f\text{d}P,f^*=\text{const}\quad(\text{a.e.})$$

(因为 T 遍历时 $\mathscr{I}$ 中只有零测集及其余集),推论显然成立. ▌

推论 2 设$\{\xi_n;n\in\mathbf{Z}\}$是一个平稳列,$E|\xi_n|^2<\infty$;又若它对应的保测变换 T 遍历,则

$$E(\xi_s\xi_0)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi_{n+s}(\omega)\xi_n(\omega),$$

$$E(\xi_s)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi_n(\omega).$$

推论 2 说明,对于遍历的平稳序列,可由一条轨道的在长时间的某种平均值来计算均值与相关函数等重要的统计特征. 遗憾的是遍历条件是极难直接验证的.

Birkhoff 定理的证明 本定理的证明有多种方法,这里我们

选用其中较简单的一种——Garsia 的证明.

1° 先证明极限 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}f(T^n\omega)=f^*(\omega)$ 存在. 类似于鞅收敛定理的证明，为此只需要证明对$\forall\ \alpha<\beta$，

$$P(\omega;\underline{f}_*(\omega)\leqslant\alpha<\beta\leqslant\bar{f}_*)=0,$$

其中
$$\bar{f}^*(\omega)=\varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(T^n\omega)=\bar{f}_*(T\omega)\ (\text{a.e.});$$

$$\underline{f}_*(\omega)=\varliminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(T^n\omega)=\underline{f}_*(T\omega)\ (\text{a.e.}).$$

记
$$E_{\alpha,\beta}\triangleq\{\omega;\underline{f}_*(\omega)\leqslant\alpha<\beta\leqslant\bar{f}^*(\omega)\},$$

那么 $E_{\alpha,\beta}\in\mathscr{I}$. 若能找到量 $\mathbb{I}$，使

$$\beta P(E_{\alpha,\beta})\leqslant\mathbb{I}\leqslant\alpha P(E_{\alpha,\beta}),$$

则我们就证明了 $P(E_{\alpha,\beta})=0$.

让我们猜想一下 $\mathbb{I}$ 应该取什么. 注意到下面这一不严格的事实：

$$\begin{aligned}\beta P(E_{\alpha,\beta})&\leqslant\int_{E_{\alpha,\beta}}\bar{f}^*\mathrm{d}P=\lim_{N_R\to\infty}\frac{1}{N_R}\sum_{n=0}^{N_R-1}\int_{E_{\alpha,\beta}}f(T^n\omega)\mathrm{d}P(\omega)\\&=\lim_{N_R\to\infty}\frac{1}{N_R}\sum_{n=0}^{N_R-1}\int_{T^{-n}E_{\alpha,\beta}}f(\omega)\mathrm{d}P(\omega)\\&=\int_{E_{\alpha,\beta}}f(\omega)\mathrm{d}P(\omega).\end{aligned}$$

我们自然地猜想能否取

$$\mathbb{I}=\int_{E_{\alpha,\beta}}f(\omega)\mathrm{d}P(\omega).$$

现在证明 $P(E_{\alpha,\beta})=0$ 就化为证明

$$\int_{E_{\alpha,\beta}}(f-\beta)\mathrm{d}P\geqslant 0.\tag{9.14}$$

$\left(\right.$因此将此结论用于 $-f$ 与 $-\alpha$ 就得到 $\displaystyle\int_{E_{\alpha,\beta}}(\alpha-f(\omega))\mathrm{d}P(\omega)\geqslant 0.\left.\right)$

(9.14)的正确性就是所谓最大遍历定理，我们将在定理 9.8 的推论中给出. 于是 f^* 的存在性就归结于定理 9.8 的推论 .

2° 假定 f^* 的存在性已证明了. 由于

$$f^*(T\omega)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(T^{n+1}\omega)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}f(T^n\omega)-\frac{1}{N+1}f(\omega)\right)$$

$$=f^*(\omega)-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}f(\omega)=f^*(\omega)\ \text{(a.e.)},$$

(由 $f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$，$f$ a.e. 有限.)可见 $f^*\in\mathscr{I}$.

另一方面，由 Fatou 引理

$$E|f^*(\omega)|\leqslant\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}E|f(T^n\omega)|=E|f(\omega)|<+\infty,$$

可见 $f^*\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$.

余下只需证明$\int_A f(\omega)\mathrm{d}P(\omega)=\int_A f^*(\omega)\mathrm{d}P(\omega)$对$\forall\ A\in\mathscr{I}$，$f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$成立. 事实上，由于 f 可换成 $g(\omega)\triangleq f(\omega)1_A(\omega)$，而且 $g^*(\omega)=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}f(T^n\omega)1_A(T^n\omega)=1_A(\omega)f^*(\omega)$，所以我们只要证明$\int g(\omega)\mathrm{d}P(\omega)=\int g^*(\omega)\mathrm{d}P(\omega)$对$\forall\ g\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$成立. 我们仍然用最大遍历定理来证明这一点. 令

$$A_{n,k}=\left\{\omega;\frac{k}{2^n}\leqslant f^*(\omega)<\frac{k+1}{2^n}\right\},$$

于是 $P\left(\Omega\setminus\bigcup\limits_k A_{n,k}\right)=0(n=1,2,\cdots)$. 对于 $\omega\in A_{n,k}$，$\forall\ \varepsilon>0$，我们有 $f^*(\omega)>\frac{k}{2^n}-\varepsilon$. 再利用定理 9.8 的推论得到

$$\int_{A_{n,k}}f\mathrm{d}P=\int_{\left\{\omega;f^*>\frac{k}{2^n}-\varepsilon\right\}\cap A_{n,k}}f(\omega)\mathrm{d}P(\omega)\geqslant\left(\frac{k}{2^n}-\varepsilon\right)P(A_{n,k}).$$

类似地考虑 $-f$，则可得

$$\int_{A_{n,k}} f(\omega)\mathrm{d}P(\omega) = -\int_{\left\{\omega:-\frac{k+1}{2^n}<(-f(\omega))^*\leqslant-\frac{k}{2^n}\right\}}(-f(\omega))\mathrm{d}P(\omega)$$

$$\leqslant -\left(-\frac{k+1}{2^n}P(A_{n,k})\right) = \frac{k+1}{2^n}P(A_{n,k}),$$

于是由

$$\frac{k}{2^n}P(A_{n,k}) \leqslant \int_{A_{n,k}} f^*(\omega)\mathrm{d}P(\omega) \leqslant \frac{k+1}{2^n}P(A_{n,k})$$

立得
$$\left|\int_{A_{n,k}}(f(\omega)-f^*(\omega))\mathrm{d}P(\omega)\right| \leqslant \frac{1}{2^n}P(A_{n,k}).$$

即
$$\left|\int(f(\omega)-f^*(\omega))\mathrm{d}P(\omega)\right| \leqslant \frac{1}{2^n} \to 0\ (n\to\infty).\ \blacksquare$$

定理 9.8(最大遍历定理)　如果$(\Omega,\mathscr{F},P)$上有保测交换 T，$f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$，令

$$\bar{f}(\omega) = \sup_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega),$$

则

$$\int_{\{\omega;\bar{f}(\omega)>0\}} f(\omega)\mathrm{d}P(\omega) \geqslant 0.$$

证明　令

$$f_0 \triangleq 0,\ f_m(\omega) \triangleq \sum_{k=0}^{m-1} f(T^k\omega)\ (m\geqslant 1),$$

$$F_n \triangleq \max_{0\leqslant m\leqslant n} f_m,\ F_n^* \triangleq \max_{1\leqslant m\leqslant n} f_m,\ F_n \geqslant F_n^*,$$

则 $\bar{f}(\omega)=\sup\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}f_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}F_n^*$，$F_n\geqslant 0$，$F_n\uparrow$，而且

$$\{\omega;\bar{f}(\omega)>0\} = \lim_{N\to\infty}\left\{\omega;\frac{F_N^*(\omega)}{N}>0\right\} = \lim_{N\to\infty}\{\omega;F_N^*(\omega)>0\}.$$

另一方面，由

$$F_N^*(T\omega) \geqslant f_m(T\omega)$$
$$= f(T\omega)+f(T^2\omega)+\cdots+f(T^m\omega)\quad(\forall\, m\leqslant N),$$

有

$$F_N^*(T\omega)+f(\omega) \geqslant f_{m+1}(\omega)\ (\forall\, m\leqslant N).$$

因为 $F_N(\omega)>0$ 与 $F_N^*(\omega)>0$ 等价，而且这时 $F_N=F_N^*$，以及在 $\{F_N^*>0\}$ 上有

$$F_N^*(T\omega)+f(\omega)\geqslant F_{N+1}^*(\omega)\geqslant F_N^*(\omega)>0,$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_{\{\omega;F_N^*(\omega)>0\}} f\mathrm{d}P &= \int_{\{\omega;F_N(\omega)>0\}} f\mathrm{d}P \\
&\geqslant \int_{\{\omega;F_N(\omega)>0\}} (F_N(\omega)-F_N^*(T\omega))\mathrm{d}P \\
&\geqslant \int F_N(\omega)\mathrm{d}P - \int_{\{\omega;F_N^*>0\}} F_N^*(T\omega)\mathrm{d}P \\
&\geqslant \int F_N(\omega)\mathrm{d}P - \int_{\{\omega;F_N^*(\omega)>0\}} F_N(T\omega)\mathrm{d}P \quad (F_N\geqslant 0) \\
&\geqslant \int (F_N(\omega)-F_N(T\omega))\mathrm{d}P = 0 \ (T\text{ 是保测变换}).
\end{aligned}$$

令 $N\to+\infty$，就得到

$$0\leqslant \lim_{N\to\infty}\int_{\{\omega;F_N^*(\omega)>0\}} f\mathrm{d}P = \int_{\{\omega;\bar{f}(\omega)>0\}} f\mathrm{d}P. \ \blacksquare$$

推论 在定理的条件下，对 $\forall A\in\mathscr{I}$ 有

$$\int_{\{\omega;\bar{f}(\omega)>0\}\cap A} f\mathrm{d}P\geqslant \alpha P(\{\bar{f}>\alpha\}\cap A).$$

特别地，取

$$A=\left\{\omega;\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}f(T^n\omega)>\alpha\right\}=\{\omega;\bar{f}(\omega)>\alpha\}\cap A,$$

我们有

$$\int_{\left\{\omega;\overline{\lim\limits_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}f(T^n\omega)>\alpha\right\}} f(\omega)\mathrm{d}P$$

$$\geqslant \alpha P\left(\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(T^n\omega)>\alpha\right).$$

证明 令 $g(\omega)=(f(\omega)-\alpha)1_A(\omega)$，于是

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}g(T^n\omega)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(f(T^n\omega)-\alpha)1_A(\omega),$$

可见

$$\bar{g}(\omega)=\sup_{N\geqslant 1}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}g(T^n\omega)=(\bar{f}(\omega)-\alpha)1_A(\omega),$$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}g(T^k\omega)=\overline{\lim_{N\to\infty}}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(T^k\omega)-\alpha\right\}1_A(\omega).$$

对 g 应用应理 9.8 就得到

$$\int_{\{\omega;f(\omega)>\alpha\}\cap A}f\mathrm{d}P=\int_{\{\omega;(\bar{f}(\omega)-\alpha)1_A(\omega)>0}f1_A(\omega)\mathrm{d}P$$

$$=\int_{\{\omega;(\bar{g}(\omega)>0\}}(g(\omega)+\alpha 1_A(\omega))\mathrm{d}P\geqslant\int_{\{\omega;\bar{g}(\omega)\}>0}\alpha 1_A(\omega)\mathrm{d}P$$

$$=\alpha P((\bar{f}(\omega)-\alpha)1_A(\omega)>0)=\alpha P(\{\omega;\bar{f}(\omega)>\alpha\}\cap A).\ \blacksquare$$

下面的命题清楚地阐明了遍历与混合的关系.

命题 9.9 T 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的保测变换,则 T 遍历当且仅当对$\forall\ A,B\in\mathscr{F}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P(T^{-k}A\cap B)=P(A)P(B).\qquad(9.15)$$

证明 1) 当(9.15)成立时,设 A 是不变集,则对$\forall\ k$, $P(A\triangle T^{-k}A)=0$. 在(9.15)中,取 $A=B$,得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P(A\cap T^{-k}A)=(P(A))^2.\qquad(9.16)$$

因为 $P(A\backslash A\cap T^{-k}A)\leqslant P(A\triangle T^{-k}A)=0$,所以

$$P(A\cap T^{-k}A)=P(A)-P(A\backslash A\cap T^{-k}A)=P(A).\qquad(9.17)$$

所以由(9.16)与(9.17)立即得到

$$P(A)=(P(A))^2.$$

可见 $P(A)=0$ 或 1.

2) 当 T 遍历,于是用定理 9.7 得到

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1_A(T^k\omega)1_B(\omega)\to 1_B(\omega)P(A).$$

由有界收敛有

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_A(T^k\omega)1_B(\omega)\right) = P(A)P(B),$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(T^{-k}A\cap B) = P(A)P(B). \quad \blacksquare$$

例 8 设

$$\Omega = [0,1) = \left\{\omega;\omega = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\omega_k, \omega_k = 0 \text{ 或 } 1\right\},$$

$$\mathscr{F} = \sigma\{A; A = (\omega;\omega_{n_1} = \omega_{n_1}^0,\cdots,\omega_{n_N} = \omega_{n_N}^0),$$
$$\forall N, n_1,\cdots,n_N \text{ 及 } (\omega_{n_1}^0,\cdots,\omega_{n_N}^0)\},$$

$P(A) \triangleq A$ 的 Lebesgue 测度，

$$T_\omega = 2\omega \pmod 1.$$

请读者自己证明 T 是保测度变换，而且混合，因而遍历. 于是由定理 9.7，对 $\forall f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) = Ef. \tag{9.18}$$

特别取 $f(\omega)=\begin{cases}0, & 0\leqslant\omega<\frac{1}{2};\\ 1, & \frac{1}{2}\leqslant\omega<1,\end{cases}$ 则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) = \frac{1}{n}(\#\{k;\omega_k = 1\})$$
$$= \text{在前 } n \text{ 位二进制小数中 1 出现的频率}$$
$$\triangleq q_n.$$

由(9.18)

$$\lim_{n\to\infty} q_n = Ef(\omega) = P\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right) = \frac{1}{2} \quad (\text{a.e.}).$$

这个结果是不明显的，它告诉我们：几乎所有的二进小数中，1 出现的频率都渐近地为$\frac{1}{2}$.

3. 平稳过程(连续时间参数)的遍历定理

设$\{\xi_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$是一个平稳过程,对它也有相应的遍历定理.

定理 9.10 设$\{\xi_t;t\in\boldsymbol{R}^+\}$是一个平稳过程,它对$(t,\omega)$二元实值可测,$E|\xi_t|<+\infty$,则

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\xi_t\mathrm{d}t=\overline{J}(\omega)\quad \text{a.e. 存在},$$

而且
$$E|\overline{J}|<+\infty,\quad E\overline{J}=E\xi_t.$$

注:同样有 $\overline{J}=E(\xi_0|\mathscr{I})$.

证明 令 $\eta_n=\int_n^{n+1}\xi_t\mathrm{d}t,\zeta_n=\int_n^{n+1}|\xi_t|\mathrm{d}t$. 容易看出$\{\eta_n;n\geqslant0\}$, $\{\zeta_n;n\geqslant0\}$都是平稳列,而且可积分. 于是

$$\frac{1}{N}\int_0^n|\xi_t|\mathrm{d}t=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_n^{n+1}|\xi_t|\mathrm{d}t=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\zeta_n(\omega)\to\overline{J}(\omega).$$

$$E(\overline{J}(\omega))<+\infty,$$

而且

$$\frac{1}{N}\zeta_N\leqslant\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\zeta_n(\omega)-\frac{1}{N-1}\sum_{n=0}^{N-2}\zeta_n(\omega)\right|+\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=0}^{N-2}\zeta_n(\omega)\right)$$

$$\to0\quad(\text{当 }N\to+\infty).$$

同样
$$\frac{1}{N}\int_0^N\xi_t\mathrm{d}t\to\overline{J}(\omega)\quad(N\to+\infty).\quad(\text{a.e.})$$

从而

$$\frac{1}{T}\int_0^T\xi_t\mathrm{d}t=\frac{1}{[T]}\int_0^{[T]}\xi_t\mathrm{d}t\cdot\frac{[T]}{T}+\frac{1}{T}\int_{[T]}^T\xi_t\mathrm{d}t,$$

但是
$$\left|\frac{1}{T}\int_{[T]}^T\xi_t\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{[T]}\zeta_{[T]}\to0\quad(\text{当 }T\to+\infty),$$

于是我们得到

$$\frac{1}{T}\int_0^T\xi_t\mathrm{d}t\to\overline{J}(\omega)\quad(\text{a.e.}).$$

另一方面,由于平稳性

$$E\int_n^{n+1}|\xi_t|\mathrm{d}t=E|\xi_t|<+\infty,$$

$$E\eta_n = E\int_n^{n+1}\xi_t \mathrm{d}t = \int_n^{n+1} E\xi_t \mathrm{d}t = E\xi_t,$$

可见 $$E\bar{J}(\omega) = E\eta_n = E\xi_t. \quad \blacksquare$$

例 9 设有均方连续的遍历的 Gauss 宽平稳过程 $\xi=\{\xi_t; t\in \boldsymbol{R}^+\}$，记 $E(\xi_t)=\mu_t$，$E(\xi_t-\mu_t)(\xi_0-\mu_0)=R(t)$. 于是

$$\mu = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \xi_t(\omega)\mathrm{d}t,$$

$$R(t) = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \xi_t(\omega)\xi_0(\omega)\mathrm{d}t - \left(\frac{1}{T}\int_0^T \xi_t(\omega)\mathrm{d}t\right)^2\right].$$

例 10 设 ξ_t 是遍历的平稳列，$\eta_t = f(\xi_{n_1+t},\cdots,\xi_{n_j+t},\cdots)$，其中 $f(x_1,x_2,\cdots)$ 为可数维 Borel 函数，则 η_t 也是遍历的平稳列. 因而

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{n_1+k},\cdots,\xi_{n_j+k},\cdots) \xrightarrow{\text{a.e.}} Ef(\xi_{n_1},\cdots,\xi_{n_j},\cdots).$$

注 1： 在非遍历情形，右边改成对不变 σ-代数的条件期望，则仍成立.

注 2： 对平稳过程，也有相应结论.

注 3： 初分布只负荷在一个正常返类的平稳马氏链是遍历的，而且例 10 中的论断成立.

4. 次可加遍历定理与乘法遍历定理

为了说明本段所讨论的两个遍历定理的背景，让我们先来考查一个例子.

设 P 是平面 Borel 可测空测 $(\boldsymbol{R}^2,\mathscr{B}^2)$ 上的概率测度，T 是 $(\boldsymbol{R}^2,\mathscr{B}^2,P)$ 上的保测变换，$L(\boldsymbol{R}^2,\boldsymbol{R}^2)$ 是平面上全体可逆线性变换组成的空间，以 $\|\ \ \|$ 表示 $L(\boldsymbol{R}^2,\boldsymbol{R}^2,)$ 中的模（即算子模）. 又设 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{R}^2\to L(\boldsymbol{R}^2,\boldsymbol{R}^2)$ 可测，令

$$f_n(x) \triangleq \|\boldsymbol{A}(T^{n-1}x)\circ\boldsymbol{A}(T^{n-2}x)\circ\cdots\boldsymbol{A}(Tx)\circ\boldsymbol{A}(x)\|. \tag{9.19}$$

则

$$f_{n+m}(x) = \|\boldsymbol{A}(T^{m+1}(T^n x)\circ\cdots\circ\boldsymbol{A}(T^n x)\circ(\boldsymbol{A}(T^{n-1}x)\circ\cdots\circ\boldsymbol{A}(x)\|$$

$$\leqslant \| A(T^{m+1}(T^n x)\circ\cdots\circ A(T^n x) \|$$
$$\cdot \| A(T^{n-1}x)\circ\cdots\circ A(x) \|$$
$$= f_m(T^n x) f_n(x).$$

于是

$$g_{n+m}(x) \leqslant g_m(T^n x) + g_n(x),$$

其中 $g_n(x) \triangleq \log f_n(x)$，$\forall\ n \geqslant 1$. 这就是所谓的次可加条件．满足上面条件的 $\{g_n\}$ 也叫上闭链．

Kingman 首次给出了下面的次可加遍历定理．

定理 9.11（次可加遍历定理） 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一个概率空间，T 是其上的保测变换．又设 $\{f_n; n \geqslant 1\}$ 是一个可测函数列，满足条件：

1） $f_1^+ \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$，$-\infty \leqslant f_n(\omega) \leqslant +\infty$，$\forall\ \omega \in \Omega$；

2） 对 $\forall\ m, n \geqslant 1$，$f_{n+m}(\omega) \leqslant f_n(\omega) + f_m(T^n \omega)$ (a.e.)，

则存在可测函数 $f(\omega)$，使得 $-\infty \leqslant f < +\infty$，使 f 的正部 $f^+ \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$，而且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} f_n(\omega) = f(\omega), \quad f(T\omega) = f(\omega) \quad \text{(a.e.)},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int f_n(\omega)\mathrm{d}P = \inf_n \frac{1}{n}\int f_n(\omega)\mathrm{d}P = \int f(\omega)\mathrm{d}P.$$

这个定理的结论与 Birkhoff 遍历定理一样，只是条件由平稳序列的部分和推广为一般可积次可加泛函．

Liggett 进一步减弱了次可加条件，得到了下面的推广次可加遍历定理．他的这一推广不仅可以用于无穷粒子系统中一些不满足 Kingman 遍历定理条件的问题，而且更突出了次可加遍历定理所需条件的实质，又大大简化了 Kingman 的证明．这里我们采用 Liggett 的版本[L].

定理 9.11′（推广的次可加遍历定理） 设 $\xi \triangleq \{\xi_{m,n}; 0 \leqslant m \leqslant n\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的可列个随机变量，满足条件：

$SE.1.$ $\xi_{0,0} = 0$，$\xi_{0,n} \leqslant \xi_{0,m} + \xi_{m,n}$ $(\forall\ 0 \leqslant m \leqslant n)$；

$SE.2.$ 对固定的 $k\geqslant 1$，$\{\xi_{nk,(n+1)k};n\geqslant 0\}$是平稳序列；

$SE.3.$ $\{\xi_{m,m+n};n\geqslant 0\}$与$\{\xi_{m+1,m+1+n};n\geqslant 0\}$同分布；

$SE.4.$ $E\xi_{0,1}^{+}<+\infty$(其中 $\xi_{0,1}^{+}=\xi_{0,1}\vee 0$).

令 $\alpha_n\triangleq E\xi_{0,n}$，则

1) α_n 有定义，而且存在

$$\alpha\triangleq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\alpha_n=\inf_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\alpha_n\in[-\infty,+\infty); \tag{9.19}$$

2) $\xi_\infty\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\xi_{0,n}$ (a.e. 存在)，而且

$$\xi_\infty(T\omega)\geqslant\xi_\infty(\omega),$$

$$E\xi_\infty=\alpha,\ \xi_\infty\in[-\infty,+\infty);$$

3) 当 $\alpha>-\infty$时有

$$\lim_{n\to\infty}E\left|\frac{1}{n}\xi_{0,n}-\xi_\infty\right|=0;$$

4) 若 $SE.2$ 中的平稳序列都遍历(即它对应的保测变换遍历)，则 $\xi_\infty=\alpha$ (a.e.).

证明 本定理证明较长，主要分以下几步：

1) 证明 $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}E\xi_{0,n}\in[-\infty,+\infty)$；

2) 证明 $\alpha>-\infty$时，$E\left(\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\xi_{0,n}(\omega)\right)\leqslant\alpha$；

3) 证明 $\alpha>-\infty$时，$E\left(\varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\xi_{0,n}(\omega)\right)\geqslant\alpha$；

4) 证明 $\alpha>-\infty$时，$\frac{1}{n}\xi_{0,n}\to\xi_\infty$($L_1$ 收敛)；

5) 证明 $\alpha=-\infty$的情况.

现在分步来证明这些事实.

1) 由 $SE.1.$ 容易看出

$$\xi_{0,n}\leqslant\xi_{0,n-1}+\xi_{n-1,n}\leqslant\cdots\leqslant\xi_{0,1}+\xi_{1,2}+\cdots+\xi_{n-1,n}. \tag{9.20}$$

再由 $SE.3$ 及 $SE.4$ 就得到

$$\alpha_n \leqslant nE\xi_{0,1}^{+} < +\infty,$$

$$\alpha_{n+m} \leqslant E\xi_{0,n} + E\xi_{n,m+n} = \alpha_n + \alpha_m.$$

于是由简单的数学分析演算就可证明(类似于定理 4.1 的证明中所用的方法)存在

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E\xi_{0,n} = \inf_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\alpha_n < +\infty.$$

2) 由 Birkhoff 遍历定理及 $SE.2$ 及(9.20)得到,对$\forall\ k\geqslant 1$,

$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{1}{Nk}\xi_{0,Nk} \leqslant \lim_{N\to\infty} \frac{1}{Nk}\sum_{n=0}^{N-1}\xi_{kn,k(n+1)} \triangleq \frac{\alpha_k(\omega)}{k} \quad (\text{a.e. 存在}),$$

而且

$$E\alpha_k(\omega) = E\xi_{kn,k(n+1)} = \alpha_k.$$

从而

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\xi_{0,n}(\omega) &\leqslant \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{mk}(\xi_{0,mk}) + \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\xi_{mk,mk+j} \\ &\leqslant \frac{1}{k}\alpha_k(\omega) + \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\xi_{mk,mk+j} \\ &\left(m = \left[\frac{n}{k}\right],\quad j = n - \left[\frac{n}{k}\right]k\right).\end{aligned}$$

因此若能证明$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\xi_{mk,mk+j}\leqslant 0$,则

$$E\left(\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\xi_{0,n}\right) \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_k}{k} = \alpha.$$

注意到

$$P\left(\omega; \frac{1}{n}\xi^{+}_{mk,mk+j}(\omega) \geqslant \delta\right) = P(\omega; \xi^{+}_{0,j}(\omega) \geqslant n\delta),$$

又由于 $E\xi^{+}_{0,j}\leqslant jE\xi^{+}_{0,1}<+\infty$,我们有

$$\sum_n P(\omega; \xi^{+}_{0,j}(\omega) \geqslant n\delta) \leqslant \int_0^\infty P\left(\omega: \frac{\xi^{+}_{0,j}(\omega)}{\delta} \geqslant x\right)\mathrm{d}x = \frac{E\xi^{+}_{0,j}}{\delta} < +\infty.$$

所以根据 Borel-Cantelli 引理,就得到

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\xi_{mk,mk+j}(\omega) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\xi^{+}_{mk,mk+j}(\omega) = 0.$$

3）这一步的证明很巧妙，主要是设法将一列不平稳的随机变量，通过一种随机平均技术，化为一族渐近平稳的序列.

注意到对任意一个对各个变量均为单调增、有界、连续的有限维柱函数 f，我们有

$$
\begin{aligned}
&Ef(\xi_{0,1},\xi_{0,2},\cdots,\xi_{0,n}) \\
&\quad = Ef(\xi_{k,k+1},\xi_{k,k+2},\cdots,\xi_{k,k+n}) \\
&\quad \geqslant Ef(\xi_{0,k+1}-\xi_{0,k},\xi_{0,k+2}-\xi_{0,k},\cdots,\xi_{0,k+n}-\xi_{0,k},\cdots).
\end{aligned}
$$

令 $\eta_n(k) \triangleq \xi_{0,k+n}-\xi_{0,k+n-1}$，上式变为

$$
Ef(\eta_1(k),\eta_1(k)+\eta_2(k),\cdots,\eta_1(k)+\cdots+\eta_n(k),\cdots).
$$

这里 $\{\eta_n(k);n\geqslant 1\}$ 不是平稳列，我们需将它改造．引入一列与 ξ 相互独立的在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上均匀分布的随机变量 u_n：

$$
P(\omega;u_n(\omega)=i)=\frac{1}{n}\quad (i=1,2,\cdots,n).
$$

于是 $\{\eta_s(u_n);s\geqslant 1\}$ 是渐近平稳的．这是因为对于任意有限维有界 Borel 函数 g，我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|E(g(\eta_{s_1}(u_n),\cdots,\eta_{s_r}(u_n))-g(\eta_{s_1+\tau}(u_n),\cdots\cdots,\eta_{s_r+\tau}(u_n)))\right| \\
&\quad = \left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}E(g(\eta_{s_1}(m),\cdots,\eta_{s_r}(m))\right. \\
&\qquad \left.-\,g(\eta_{s_1}(m+\tau),\cdots,\eta_{s_r}(m+\tau)))\right| \\
&\quad \leqslant \frac{C}{n}2\tau \to 0\ (n\to+\infty).
\end{aligned}
$$

最后的不等号是由于前式和号中两项不同的总共 2τ 项，每项不超过 $C\triangleq\sup|g|$.

又由于 $SE.1$

$$
E(\eta_s(u_n))^+=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}E(\eta_s(m))^+\leqslant E\xi_{0,1}^+<+\infty,
$$

以及

$$
E(\eta_s(u_n))=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}E(\xi_{0,m+s}-\xi_{0,m+s-1})\ (s\leqslant n)
$$

$$= \frac{1}{n}E(\xi_{0,n+s} - \xi_{0,s}) = \frac{n+s}{n}\frac{1}{n+s}\alpha_{n+s} - \frac{1}{n}\alpha_s$$

$$\geqslant -2|\alpha| - \beta^+ > -\infty$$

(注意到$\lim\limits_{n} = \frac{\alpha n}{n} = \alpha$，本段假定了 α 有限，故 $\beta \triangleq \sup \frac{\alpha n}{n}$ 也有限)，从而容易验证$\{\eta_s(u_n);s\geqslant 1\}$决定的测度$\{\mu_n;n\geqslant 1\}$在 $\boldsymbol{R}^d(\forall\ d)$上是胎紧的．于是就一定有$\{\mu_n;n\geqslant 1\}$的弱收敛子列，使它弱收敛到某一测度 μ. 换句话说$\{\eta_s(u_n);s\geqslant 1\}$可有子列在 $\boldsymbol{R}^d(\forall\ d)$中弱收敛到一个平稳列$\{\bar{\eta}_s;s\geqslant 1\}$. 这里平稳性是来源于$\{\eta_s(u_n)\}$的有限维分布的渐近平稳性．再用前面的结果

$$\begin{aligned} Ef(\xi_{0,1},\xi_{0,2},\cdots) &\geqslant \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n} Ef(\eta_1(m),\eta_1(m)+\eta_2(m),\cdots) \\ &= Ef(\eta_1(u_n),\eta_1(u_n)+\eta_2(u_n),\cdots) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} Ef(\bar{\eta}_1,\bar{\eta}_1+\bar{\eta}_2,\cdots). \end{aligned}$$

最后，我们就得到对于任意增函数 g 有

$$Eg\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\bar{\eta}_k\right) \leqslant Eg\left(\frac{1}{n}\xi_{0n}\right).$$

这说明

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\bar{\eta}_k \overset{st}{\leqslant} \xi_{0n}$$

(这里“$\overset{st}{\leqslant}$”表示“随机地不大于”(参见[Ro]). 由 Birkhoff 定理

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\eta}_k \xrightarrow{\text{a.e.}} 某\ \tilde{\eta}_\infty.$$

于是

$$\tilde{\eta}_\infty \overset{st}{\leqslant} \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\xi_{0,n}.$$

从而有

$$\begin{aligned} E\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\xi_{0,n}(\omega) &\geqslant E\tilde{\eta}_k = \lim_{n\to\infty}E\eta_s(u_n) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\alpha_{n+s} - \alpha_s) = \alpha. \end{aligned}$$

4）由上两步结果得到：当 $\alpha>-\infty$ 时，

$$0\leqslant E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\xi_{0,n}-\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\xi_{0,n}\right)\leqslant\alpha-\alpha=0.$$

可见

$$\xi_\infty\triangleq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\xi_{0,n}(\omega)\ \ (\text{a.e.d }P)$$

存在，而且 $E\xi_\infty=\alpha$. 注意到由 $SE.1$，$SE.3$，$SE.4$ 可知 $\left\{\frac{1}{n}\xi_{0,n}^{+};n\geqslant1\right\}$是一致可积分的，因此

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\frac{\xi_{0,n}}{n}-\xi_\infty\right)^{+}=0.$$

再利用

$$E\left|\frac{\xi_{0,n}}{n}-\xi_\infty\right|=2E\left(\frac{\xi_{0,n}}{n}-\xi_\infty\right)^{+}-\left(E\frac{\xi_{0,n}}{n}-\alpha\right)$$

就得到

$$\frac{1}{n}\xi_{0,n}\xrightarrow{L_1}\xi_\infty.$$

5）最后来讨论 $\alpha=-\infty$ 的情形．令

$$\xi_{m,n}(N)\triangleq\xi_{m,n}\vee(-N(n-m)).$$

则$\{\xi_{m,n}(N);m\leqslant n\}$仍满足定理条件，而且

$$\inf_{n\geqslant1}\frac{1}{n}E\xi_{0,n}(N)\geqslant-N>-\infty.$$

又由于

$$\frac{1}{n}\xi_{0,n}(N)=\left(\frac{1}{n}\xi_{0,n}\right)\vee(-N),$$

可见存在

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\xi_{0,n}\right)\vee(-N)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\xi_{0,n}(N).$$

于是定理的一般结果由 $\alpha>-\infty$ 的情况就立即得到．∎

由定理 9.11′得到定理 9.11：对满足定理 9.11 条件的$\{f_n;n\geqslant1\}$，令

$$\xi_{m,n}(\omega) = f_{n-m}(T^m\omega),\ \xi_{0,0} = 0,$$

于是对 $m \leqslant r \leqslant n$,

$$\begin{aligned}\xi_{m,n}(\omega) &\leqslant f_{r-m}(T^m\omega) + f_{n-r}(T^{r-m} \circ T^m\omega) \\ &= \xi_{m,r}(\omega) + \xi_{r,n}(\omega).\end{aligned}$$

可见定理 9.11 的条件(要求可加性)强于 $SE.1$. 由于 T 是保测变换,容易看出 $SE.2$. $SE.3$ 也成立.

定理 9.12(Oseledets 乘法遍历定理) 设 T 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的保测变换,$\boldsymbol{A}:\Omega\to L(\boldsymbol{R}^d,\boldsymbol{R}^d)$($\boldsymbol{R}^d$ 上的可逆线性变换空间),它使 $\boldsymbol{A}(\omega),\boldsymbol{A}(T\omega),\cdots$为独立同分布随机映射列. 又设

$$(\log \| \boldsymbol{A}(\omega) \|)^+ \in L^1(\Omega,\mathscr{F},P),$$

则存在 Ω 的子集 $\tilde{\Omega}$,使 $T\tilde{\Omega}\subset\tilde{\Omega}$,$P(\tilde{\Omega})=1$,而且满足条件:

1) 存在正整值可测函数 $s(\omega)$,使得 $s(T\omega)=s(\omega)$;

2) 对$\forall\ \omega\in\tilde{\Omega}$,存在实数

$$\lambda^{(1)}(\omega) < \lambda^{(2)}(\omega) < \cdots < \lambda^{(s(\omega))}(\omega);$$

3) 对$\forall\ \omega\in\tilde{\Omega}$,存在 $\boldsymbol{R}^d$ 的线性子空间:

$$\{0\} = V^{(0)}(\omega) \subset V^{(1)}(\omega) \subset \cdots \subset V^{(s(\omega))}(\omega) = \boldsymbol{R}^d;$$

4) 对$\forall\ \omega\in\tilde{\Omega}$,$1\leqslant i\leqslant s(\omega)$及$\forall\ v\in V^{(i)}(\omega)\setminus V^{(i-1)}(\omega)$,我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|\boldsymbol{A}(T^{n-1}\omega)\circ\boldsymbol{A}(T^{n-2}\omega)\circ\cdots\circ\boldsymbol{A}(\omega)v\| = \lambda^i(\omega);$$

5) $\lambda^{(i)}$在$\{\omega;s(\omega)\geqslant i\}$上定义并可测,而且这时

$$\lambda^{(i)}(T\omega) = \lambda^{(i)}(\omega);$$

6) $\boldsymbol{A}(\omega)V^{(i)}(\omega)\subset V^{(i)}(T\omega)$ $(\forall\ i\leqslant s(\omega))$.

证明大意 先将定理 9.11 用于证明存在极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|\boldsymbol{A}(T^{n-1}\omega)\circ\boldsymbol{A}(T^{n-2}\omega)\circ\cdots\circ\boldsymbol{A}(\omega)\| \triangleq \lambda^{(s)}(\omega) \quad (\text{a.e.})$$

与

$$\lambda^{(s)}(T\omega)=\lambda^{(s)}(\omega) \ (\text{a.e.}).$$

用较长的篇幅(本书略去它)可以证明对于$\forall\ v\in\boldsymbol{R}^d$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|\boldsymbol{A}(T^{n-1}\omega)\circ\cdots\circ\boldsymbol{A}(\omega)v\|$$

存在，记 $V^{(s)}=\boldsymbol{R}^d$，再令

$$V^{(s-1)}(\omega) \triangleq \left\{v; \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log \| A(T^{n-1}\omega)\circ\cdots\circ A(\omega)v \| < \lambda^{(s)}(\omega)\right\},$$

若将 $A(\omega)$ 限制在 $V^{(s-1)}(\omega)$ 中，同样可求得 $\lambda^{(s-1)}(\omega)<\lambda^{(s)}(\omega)$，并且还有 $v\in V^{(s-1)}(\omega)$ 当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log \| A(T^{n-1}(T\omega))\circ\cdots\circ AT(T\omega))\circ A(T\omega)\circ(A(\omega)v) \|$$
$$\leqslant \lambda^{(s-1)}(\omega) = \lambda^{(s-1)}(T\omega).$$

于是 $A(\omega)v\in V^{s-1}(T\omega)$. 重复以上步聚，直至得到 $\{0\}$，这时重复的次数实际上依赖于 ω，记为 $s(\omega)$. 这样就得到定理所要求的

$$\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\cdots,\lambda^{(s-1)},\lambda^{(s)},$$

$$\{0\} = V^{(0)}(\omega) \subset V^{(1)}(\omega) \subset \cdots \subset^{(s-1)}(\omega) \subset V^{(s)} = \boldsymbol{R}^k.$$

取所有的零测度例外集的交就得 Ω_0，取 $\tilde{\Omega}=\Omega\backslash\Omega_0$ 即得到定理所求的一切. ▌

注：当 T 是遍历的时候，s 及 $\lambda^{(i)}(i=1,2,\cdots,s)$ 都是非随机的常数.

5. 熵与条件熵

熵的概念最早由 C. Shannon 在信息论中给出. 它的直观意思是平均信息量. 而信息量的定义基于如下的直观考虑：设在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 中给定一个随机事件 A，当被告知它发生时，所获得的信息量 $H(A)$ 应该是它的概率 $P(A)$ 的函数. 即

$$H(A) = \varphi(P(A));$$

而且应满足以下条件

1° $H(A)\geqslant 0, H(\Omega)=0$（意思是得知一个必然事件发生并无信息）；

2° 当 A,B 独立，$H(AB)=H(A)+H(B)$；

3° 当 $A_n\to A, H(A_n)\to H(A)$.

也即 $\varphi(\cdot)$ 应满足以下条件：

1° $\varphi\in C([0,1]\to\boldsymbol{R}^+)$；

2° $\varphi(pq)=\varphi(p)+\varphi(q)$.

由此可见，$\varphi(p)=-\log_{\alpha}p\ (\alpha>1)$（$\alpha=1$ 的情况下，$\varphi\equiv 0$ 显然是无意义的），其中 α 的取值取决于我们对信息单位的选取.

让我们再从随机小数的信息量为例来理解上面的定义.

例 11 设随机小数 x 在$[0,1]$中均匀分布. 若将它展成 a 进位的小数表示，则

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)a^{-n}.$$

于是$\{a_n(x);n\geqslant 1\}$是相互独立同分布序列，而且

$$P(x;a_n(x)=0)=P(x;a_n(x)=1)=\cdots$$
$$=P(x;a_n(x)=a-1)=\frac{1}{a}.$$

容易看出，已知某一位 $a_n(x)=i\ (0\leqslant i\leqslant a-1)$这一事件（记为 A_n^i）的概率相同，因而包含相同的信息量$-\log_a\frac{1}{a}$. 如果我们希望把已知一位二进制数 $a_m(x)=1$（或 0）的信息量作为一个单位信息，我们就取 $\alpha=2$，这时已知 n 位二进制数值的信息就是$-\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n=n$. 已知一个 8 进制数的 1 位，就等价于已知一个二进制数的 3 位，因而它的信息是 $3=-\log_2\frac{1}{8}$. 由此可见，Shannon 关于信息量的抽象是很切合实际的.

下面为方便起见，我们取 $\alpha=\mathrm{e}$（自然对数底）.

定义 9.6（随机事件的信息量） $(\Omega,\mathscr{F},P)$中的随机事件 A 的信息量定义为 $H(A)\triangleq-\log P(A)$.

考虑 Ω 的一个分割 π：$\Omega=\bigcup\limits_{r\in T}\Omega_r$，其中 Ω_r 可测，而且 $\Omega_r\cap\Omega_s=\varnothing\ (r,s\in T;r\neq s)$. 显然对$\forall\ \omega\in\Omega$ 存在唯一的 $\Omega_{r(\omega)}$包含 ω，记为 $\pi(\omega)$. 由于对$\forall\ x\in\boldsymbol{R}$,

$$\{\omega;H(\pi(\omega))\leqslant x\}=\bigcup_{P(\Omega_r)\geqslant e^{-x}>0}\Omega_r,$$

而且右端最多为$[e^x]+1$个集合之并，因而它是可测的．于是我们可定义分割的熵．

定义 9.7(分割的熵)　分割π的熵定义为

$$h(\pi) \triangleq E(H(\pi(\omega))).$$

事实上，若记$\pi(0)=\{\omega;P(\pi(\omega))=0\}$，则

$$h(\pi)=\begin{cases}-\sum\limits_{P(\Omega_r)>0}P(\Omega_r)\log P(\Omega_r), & \text{当 } P(\pi(0))=0;\\ +\infty, & \text{当 } P(\pi(0))>0.\end{cases}$$

可见分割的熵本质上是对可列分割定义的．当$P(\pi(0))>0$说明$\pi(0)$中有不可列个点，这时$h(\pi)=+\infty$. 一个随机变量ξ也可按其取值导出一个分割$\pi_\xi:\Omega=\bigcup\limits_{r\in R}\Omega_r,\Omega_r=\{\omega;\xi(\omega)=r\}$．这样定义$h(\xi)\triangleq h(\pi_\xi)$. 当$h(\xi)<+\infty$，在忽略某个零测度的$\Omega$的子集后，$\xi$最多只能取可列个不同的值$\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$. 这时

$$h(\xi)=\sum_i P(\xi=x_i)\log P(\xi=x_i).$$

$h(\xi)$说明ξ随机性的大小．当ξ几乎是常数，则$h(\xi)=-1\log 1=0$；当$P(\xi=x_1)=\cdots=P(\xi=x_n)=\frac{1}{n}$，$h(\xi)=n\left(-\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}\right)=\log n$；当$\xi$是有密度的随机变量，$h(\xi)=+\infty$.

由于对于连续随机变量(或相应的分布)，它的熵是$+\infty$，所以我们引入相对熵的概念．

定义 9.8(相对熵)　设在$(\Omega,\mathscr{F})$上有概率测度μ与ν，μ相对ν的相对熵定义为

$$h(\nu,\mu)=\begin{cases}\int\log\frac{d\mu}{d\nu}(\omega)\mu(d\omega), & \text{当 } \mu\ll\nu\text{，且 }\log\frac{d\mu}{d\nu}\in L_1(d\mu);\\ +\infty, & \text{其它}.\end{cases}$$

下面的命题给出一个重要的相对熵的等价定义．

命题 9.13

$$h(\nu,\mu)=\tilde{h}(\nu,\mu)$$

$$\triangleq \inf\left\{c;\ \int\varphi(\omega)\mu(\mathrm{d}\omega)\leqslant c+\log\int \mathrm{e}^{\varphi(\omega)}\nu(\mathrm{d}\omega)\right.$$

$$\left.\text{对一切有界可测函数}\ \varphi\ \text{成立}\right\}$$

$$=\sup_{\varphi\text{有界可测}}\left\{\int\varphi\mathrm{d}\mu-\log\int \mathrm{e}^{\varphi}\mathrm{d}\nu\right\}\geqslant 0\ (\text{取}\ \varphi=1).$$

证明 1) 当 $\widetilde{h}(\nu,\mu)<+\infty$，对 $\forall\ A\in\mathscr{F}$，$\nu(A)=0$，令 $\varphi_n=n1_A$，就有

$$n\mu(A)=\int\varphi_n\mathrm{d}\mu\leqslant\widetilde{h}(\nu,\mu)+\log\int \mathrm{e}^{n1_A}\nu(\mathrm{d}\omega)=\widetilde{h}(\nu,\mu)<+\infty.$$

令 $n\to\infty$，就得到 $\mu(A)=0$. 可见 $\mu\ll\nu$.

又由于当 $0<x<1$ 时 $|\log x|\leqslant x^{-1}$，所以 $\left(\log\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)^-\leqslant\left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)^{-1}$，从而

$$\int\left(\log\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)^-\mathrm{d}\mu\leqslant\int\left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\mathrm{d}\nu=\nu(\Omega)=1<+\infty.$$

另一方面，令

$$\varphi_N=\left(\log\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)1_{A_N},\quad A_N=\left\{\omega;0\leqslant\log\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}(\omega)\leqslant N\right\},$$

则

$$\begin{aligned}\int\left(\log\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)^+\mathrm{d}\mu&=\lim_{N\to\infty}\int\varphi_N\mathrm{d}\mu\leqslant\widetilde{h}(\nu,\mu)+\lim_{N\to\infty}\log\int \mathrm{e}^{\varphi_N}\mathrm{d}\nu\\&=\widetilde{h}(\nu,\mu)+\lim_{N\to\infty}\log\left(\nu(A_N^c)+\int_{A_N}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\mathrm{d}\nu\right)\\&=\widetilde{h}(\nu,\mu)+\lim_{N\to\infty}\log(\nu(A_N^c)+\mu(A_N))\\&\leqslant\widetilde{h}(\nu,\mu)+\log 2.\end{aligned}\tag{9.21}$$

可见 $\widetilde{h}(\nu,\mu)<+\infty$ 蕴含 $\left(\log\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)^+\in L_1(\mathrm{d}\mu)$. 再令 $\psi_N(\omega)=\log\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}(\omega)\times 1_{B_N}$，其中 $B_N=\left\{\omega;\left|\log\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}(\omega)\right|\leqslant N\right\}$. 类似地，我们有

$$\int \log \frac{d\mu}{d\nu} d\mu = \lim_{N\to\infty} \int \psi_N d\mu \leqslant \tilde{h}(\nu,\mu) + \lim_{N\to\infty} \log(\nu(B_N^c) + \mu(B_N))$$

$$= \tilde{h}(\nu,\mu) \quad (B_N \to \Omega),$$

因而
$$h(\nu,\mu) \leqslant \tilde{h}(\nu,\mu).$$

2) 由 Jensen 不等式可见：当 $h(\nu,\mu) < +\infty$，对 φ 有界可测，我们有

$$\int \left(\varphi - \log \frac{d\mu}{d\nu}\right) d\mu \leqslant \log \int e^{\varphi - \log \frac{d\mu}{d\nu}} d\mu = \log \int e^{\varphi} d\nu.$$

从而
$$\tilde{h}(\nu,\mu) \leqslant \int \log \frac{d\mu}{d\nu} d\mu = h(\lambda,\mu).$$

结合 1)就立即得到 $h(\nu,\mu) = \tilde{h}(\nu,\mu)$. ▌

注 1：由于 $\varphi(x) \triangleq \log x - 1 + \frac{1}{x} \geqslant 0$ 且 $\varphi = 0$ 当且仅当 $x = 1$，

$$h(\nu,\mu) = \int \log \frac{d\mu}{d\nu} d\mu = 1 - \int d\nu + \int \varphi\left(\frac{d\mu}{d\nu}\right) d\mu = \int \varphi\left(\frac{d\mu}{d\nu}\right) d\mu \geqslant 0,$$

且 $h(\mu,\nu) = 0$ 当且仅当 $\varphi\left(\frac{d\mu}{d\nu}\right) = 0$ (a. e. $d\mu$)即$\frac{d\mu}{d\nu} = 1$ (a. e. $d\mu$)，即忽略 $d\mu$ 的零测集后 μ 与 ν 相同.

注 2：不难证明当 Ω 是 Polish 空间，$\mathscr{F}$ 是其 Borel 域时，

$$h(\nu,\mu) = \inf\left\{c; \int \varphi d\mu \leqslant c + \log \int e^{\varphi} d\nu, \text{对一切有界连续函数 } \varphi \text{ 成立}\right\}.$$

令 $\mathscr{M} \triangleq \{\mu; \mu$ 是 Polish 空间$(\Omega, \mathscr{F})$上的概率测度$\}$，并考虑它的弱收敛拓扑.

命题 9.14 $h(\nu,\cdot)$是 $\mathscr{M}$ 上的下半连续、非负凸函数，而且 $h(\nu,\mu) = 0$ 当且仅当 ν, μ 在忽略一个 μ, ν 公共的零测集后它们相同.

注：上命题中 h 的非负与凸性并不要求 Ω 是 Polish 空间. 由 $\mu \ll \nu$，ν 的零测集即 μ 与 ν 的公共零测集.

证明 1) 令 $\varphi = 1$，则

$$h(\nu,\mu) \geqslant \int \varphi d\mu - \log \int e^{\varphi} d\nu = 1 - \log e = 0.$$

而且由命题 9.13 后注 1)，$h(\nu,\mu) = 0$ 当且仅当忽略一个 μ, ν 公共

的零测集后 μ,ν 相同.

2) 对$\forall\ \alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1$,由于对$\forall\ \varphi$有界可测函数,

$$
\begin{aligned}
&\alpha h(\nu,\mu_1)+\beta h(\nu,\mu_2) \\
&\quad\geqslant \alpha\left(\int\varphi\mathrm{d}\mu_1-\log\int\mathrm{e}^{\varphi}\mathrm{d}\nu\right)+\beta\left(\int\varphi\mathrm{d}\mu_2-\log\int\mathrm{e}^{\varphi}\mathrm{d}\nu\right) \\
&\quad=\int\varphi\mathrm{d}(\alpha\mu_1+\beta\mu_2)-\log\int\mathrm{e}^{\varphi}\mathrm{d}\nu,
\end{aligned}
$$

立即得到

$$\alpha h(\nu,\mu_1)+\beta h(\nu,\mu_2)\geqslant h(\nu,\alpha\mu_1+\beta\mu_2).$$

3) 令 $H(\nu,\mu,\varphi)=\int\varphi\mathrm{d}\mu-\log\int\mathrm{e}^{\varphi}\mathrm{d}\nu$. 对$\forall\ \mu_0\in\mathscr{M}$,存在 φ_n,使得 φ_n 有界连续而且

$$h(\nu,\mu_0)=\lim_{n\to\infty}H(\nu,\mu_0,\varphi_n).$$

于是由于 $H(\nu,\mu,\varphi)$对 μ 连续,可见

$$\varliminf_{\mu\to\mu_0}h(\nu,\mu)\geqslant\lim_{\mu\to\mu_0}H(\nu,\mu,\varphi_n)=H(\nu,\mu_0,\varphi_n)\to h(\nu,\mu_0),$$

即 $h(\nu,\mu)$下半连续. ▍

推论 1 设 $x_i,y_i\geqslant0(i=1,2,\cdots)$而且

$$1=\sum_i x_i\geqslant\sum_i y_i.$$

则

1) $\displaystyle\sum_i x_i\log\frac{x_i}{y_i}\geqslant0$;

2) $\displaystyle\sum_i x_i\log\frac{x_i}{y_i}=0$ 当且仅当 $x_i=y_i,\forall\ i$.

证明 取 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$,令 $x_0=0,y_0=1-\sum_{i\geqslant1}y_i$ 即得到 $\mu(\{i\})\triangleq x_i$;$\nu(\{i\})\triangleq y_i(i=0,1,\cdots)$. μ,ν 是 Ω 上两个概率测度. 不妨设 $y_i>0$(否则推论是平凡的). 这时

$$\mu\ll\nu,\ \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}(i)=\frac{x_i}{y_i},\ h(\nu,\mu)=\sum_i x_i\log\frac{x_i}{y_i}\geqslant0,$$

而且,$h(\nu,\mu)=0$ 当且仅当 $\mu(\{i\})=\nu(\{i\})$,即 $x_i=y_i(\forall\ i)$. ▍

推论 2 设 $\mathscr{M}_0$ 是全体$\{1,2\cdots,N\}$上的概率测度，则

$$\sup\{h(\mu);\mu\in\mathscr{M}_0\}=\ln N=h(\mu_0),$$

其中

$$\left\{\mu_0:\mu_0(i)=\frac{1}{N}(\forall\ i=1,2,\cdots,N)\right\},\ h(\mu)\triangleq-\sum_{i=1}^{n}\mu(i)\log\mu(i).$$

证明 $$0\leqslant h(\mu_0,\mu)=\sum_{i=1}^{N}\mu(i)\log\frac{\mu(i)}{\mu_0(i)}$$

$$=\log N-\left(-\sum_{i=1}^{n}\mu(i)\log\mu(i)\right)=\log N-h(\mu).\ \blacksquare$$

推论 3 对 $\mathscr{M}_0$(定义见推论 2)中的测度 μ

$$h(\mu)=\log N-h(\mu_0,\mu).$$

事实上还可考虑在一个子 σ-代数 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}$ 上的相对熵：

$$h_{\mathscr{F}_1}(\nu,\mu)\triangleq h(\nu_{\mathscr{F}_1},\mu_{\mathscr{F}_1}),$$

其中 $\nu_{\mathscr{F}_1},\mu_{\mathscr{F}_1}$ 分别是 ν,μ 在 $\mathscr{F}_1$ 上的限制．一个自然的问题是对于不同的 σ-代数 $\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2$，它们的关系是什么？下面的命题给出了它们的一般关系．

命题 9.15 设 Polish 空间的测度空间$(\Omega,\mathscr{F})$上有子 σ-代数 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2\subset\mathscr{F}$．则

$$h_{\mathscr{F}_2}(\nu,\mu)=h_{\mathscr{F}_1}(\nu,\mu),+E^{\mu}(h_{\mathscr{F}_2}(\nu_{\omega|\mathscr{F}_1},\mu_{\omega|\mathscr{F}_1})),$$

其中 $\nu_{\omega|\mathscr{F}_1},\mu_{\omega|\mathscr{F}_1}$ 分别满足以下条件的正则条件测度：

$$\nu_{\omega|\mathscr{F}_1}(A)=E^{\nu}(A|\mathscr{F}_1)(\omega)\ (\forall\ A\in\mathscr{F}_2),$$

$$\mu_{\omega|\mathscr{F}_1}(A)=E^{\mu}(A|\mathscr{F}_1)(\omega)\ (\forall\ A\in\mathscr{F}_2).$$

证明 不妨设 $\mu\ll\nu$，而且 $h_{\mathscr{F}_2}(\nu,\mu)<+\infty$．

1) 先证

$$\frac{\mathrm{d}\mu_{\mathscr{F}_2}}{\mathrm{d}\nu_{\mathscr{F}_2}}(\omega)=\frac{\mathrm{d}\mu_{\mathscr{F}_1}}{\mathrm{d}\nu_{\mathscr{F}_1}}(\omega)\frac{\mathrm{d}\mu_{\omega|\mathscr{F}_1}}{\mathrm{d}\nu_{\omega|\mathscr{F}_1}}(\omega).\tag{9.22}$$

事实上，对$\forall\ A\in\mathscr{F}_2$，

$$\mu(A)=E^{\mu}(1_A)=E^{\mu}(E^{\mu}(1_A|\mathscr{F}_1))$$
$$=(E^{\mu_{\mathscr{F}_1}}(E^{\mu_{\omega|\mathscr{F}_1}}(1_A))$$
$$=E^{\nu_{\mathscr{F}_1}}\left\{\frac{\mathrm{d}\mu_{\mathscr{F}_1}}{\mathrm{d}\nu_{\mathscr{F}_1}}E^{\nu_{\omega|\mathscr{F}_1}}\left[\frac{\mathrm{d}\mu_{\omega|\mathscr{F}_1}}{\mathrm{d}\nu_{\omega|\mathscr{F}_1}}1_A\right]\right\}$$
$$=E^{\nu}\left\{\frac{\mathrm{d}\mu_{\mathscr{F}_1}}{\mathrm{d}\nu_{\mathscr{F}_1}}E^{\nu}\left\{\frac{\mathrm{d}\mu_{\omega|\mathscr{F}_1}}{\mathrm{d}\nu_{\omega|\mathscr{F}_1}}1_A|\mathscr{F}_1\right\}\right\}$$
$$=E^{\nu}\left\{\frac{\mathrm{d}\mu_{\mathscr{F}_1}}{\mathrm{d}\nu_{\mathscr{F}_1}}\frac{\mathrm{d}\mu_{\omega|\mathscr{F}_1}}{\mathrm{d}\nu_{\omega|\mathscr{F}_1}}1_A\right\}.$$

由此可见(9.22)成立.

2) $$h_{\mathscr{F}_2}(\nu,\mu)=E^{\mu}\left\{\log\frac{\mathrm{d}\mu_{\mathscr{F}_2}}{\mathrm{d}\nu_{\mathscr{F}_2}}\right\}=E^{\mu_{\mathscr{F}_2}}\left\{\log\frac{\mathrm{d}\mu_{\mathscr{F}_1}}{\mathrm{d}\nu_{\mathscr{F}_1}}\right\}$$
$$+E^{\mu_{\mathscr{F}_2}}\left\{\log\frac{\mathrm{d}\mu_{\omega|\mathscr{F}_1}}{\mathrm{d}\nu_{\omega,\mathscr{F}_1}}\right\}$$
$$=E^{\mu_{\mathscr{F}_1}}\left\{\log\frac{\mathrm{d}\mu_{\mathscr{F}_1}}{\mathrm{d}\nu_{\mathscr{F}_1}}\right\}+E^{\mu_{\mathscr{F}_2}}\left\{E^{\mu}\left[\log\frac{\mathrm{d}\mu_{|\mathscr{F}_1}}{\mathrm{d}\nu_{|\mathscr{F}_1}}\middle|\mathscr{F}_1\right]\right\}$$
$$=h_{\mathscr{F}_1}(\nu,\mu)+E^{\mu_{\mathscr{F}_2}}\left\{E^{\mu_{\omega|\mathscr{F}_1}}\left(\log\frac{\mathrm{d}\mu_{\omega|\mathscr{F}_1}}{\mathrm{d}\nu_{\omega|\mathscr{F}_1}}\right)\right\}.$$

最后的等式是由于

$$E^{\mu}(1_A|\mathscr{F}_1)=E^{\mu_{\omega|\mathscr{F}_1}}(1_A)\ (\forall\ A\in\mathscr{F}_2).$$

不难由测度论典型方法得到对$\forall\ \varphi\in\mathscr{F}_2$

$$E^{\mu}(\varphi|\mathscr{F}_1)=E^{\mu_{\omega|\mathscr{F}_1}}(\varphi).\ \blacksquare$$

推论 1 $h(\pi_1\vee\pi_2)=h(\pi_1)+h(\pi_2/\pi_1)$,其中

$$\pi_1\vee\pi_2:\Omega=\bigcup_{i,j}\Omega_i^{(1)}\Omega_j^{(2)},\quad \pi_k:\Omega=\bigcup_j\Omega_j^{(k)}\quad (k=1,2);$$
$$h(\pi_2/\pi_1)\triangleq E(h_{\omega|\mathscr{F}_1}(\pi_2)),\tag{9.23}$$

$h_{\omega|\mathscr{F}_1}(\pi_2)$是在测度$\mu_{\omega|\mathscr{F}_1}(\cdot)=E(\cdot|\mathscr{F}_1)$下的熵,$\pi_1,\pi_2$分别是$n_1,n_2$个集合的有限分割.

证明 令$\mu_0^{(\pi_1)},\mu_0^{(\pi_2)}$分别是在$\pi_1,\pi_2$上的均匀分布.于是由命题 9.16 推论 3,及本命题

$h(\pi_1 \vee \pi_1)$

$$= \log n_1 n_2 - h_{\mathscr{F}_2}(\mu_0^{(\pi_1)} \times \mu_0^{(\pi_2)}, \mu) \quad (\text{其中 } \mathscr{F}_2 = \sigma(\pi_1 \vee \pi_2))$$

$$= \log n_1 - h_{\mathscr{F}_1}(\mu_0^{(\pi_1)}, \mu) + E(\log n_2 - h_{\omega|\mathscr{F}_1}(\mu_0^{(\pi_2)}, \mu))$$

$$(\mathscr{F}_1 = \sigma(\pi_1))$$

$$= h(\pi_1) + E(h_{\omega|\mathscr{F}_1}(\pi_2)) = h(\pi_1) + h(\pi_2/\pi_1).$$ ▌

推论 2 $h(\pi_1) - h(\pi_1/\pi_2) = h_{\mathscr{F}_2}(\mu_{\pi_1} \times \mu_{\pi_2}, \mu)$,

$$h(\pi_1) \geqslant h(\pi_1/\pi_2) \geqslant 0.$$

证明 由推论 1 我们有

$h(\pi_1) - h(\pi_1/\pi_2)$

$$= h(\pi_1) - (h(\pi_1 \vee \pi_2) - h(\pi_2))$$

$$= -\sum_i \mu(\Omega_i^{(1)}) \log \mu(\Omega_i^{(1)}) - \sum_j \mu(\Omega_j^{(2)}) \log \mu(\Omega_j^{(2)})$$

$$+ \sum_{i,j} \mu(\Omega_i^{(1)} \Omega_j^{(2)}) \log \mu(\Omega_i^{(1)} \Omega_j^{(2)})$$

$$= \sum_{i,j} \mu(\Omega_i^{(1)} \Omega_j^{(2)}) \log \frac{\mu(\Omega_i^{(1)} \Omega_j^{(2)})}{\mu(\Omega_i^{(1)}) \mu(\Omega_j^{(2)})}$$

$$= h_{\mathscr{F}_2}(\mu_{\pi_1} \times \mu_{\pi_2}, \mu).$$

又由于 $h_{\mathscr{F}_2}(\mu_{\pi_1} \times \mu_{\pi_2}, \mu) \geqslant 0$,就立得 $h(\pi_1) \geqslant h(\pi_1/\pi_2)$. ▌

推论 3 $h(\pi_1 \vee \pi_2) \leqslant h(\pi_1) + h(\pi_2)$.

证明 由推论 1,2,

$$h(\pi_1 \vee \pi_2) = h(\pi_1) + h(\pi_2/\pi_1) \geqslant h(\pi_1) + h(\pi_2).$$ ▌

定义 9.9(条件熵) 上面命题中 $h(\pi_1/\pi_2)$ 称分割 π_1 对 π_2 的条件熵(见(9.23)).

下面我们给出保测变换 T 的熵.

定义 9.10(保测变换的熵) T 为保测变换,π 是一个分割,则定义分割 π 对 T 的熵为

$$h(\pi, T) \triangleq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} (h(\pi_n(T))),$$

其中

$$\pi_n(T):\Omega = \bigcup_{i_0,i_1,\cdots,i_n}(\Omega_{i_0}\cap T^{-1}\Omega_{i_1}\cap\cdots\cap T^{-n}\Omega_{i_n}).$$

T 的熵定义为

$$h(T) = \sup_{\pi\text{是有限分割}} h(\pi,T).$$

例 12 仍考虑$[0,1)$上均匀分布的随机变量$\xi(\omega)$，$\xi(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n(\omega)2^{-n}$，$\{a_n(\omega)\}$相互独立；而且

$$P(a_n=1)=P(a_n=0)=\frac{1}{2},\ \Omega=[0,1].$$

令

$$\pi_k:\Omega=\Omega_0^{(k)}\cup\Omega_1^{(k)},\ \Omega_i^{(k)}=\{\omega;a_k^{(\omega)}=i\}(k=1,2,\cdots;i=0,1).$$

于是

$$h(\pi_k)=\log 2;$$

$$h(\pi_{n_1}\vee\pi_{n_2}\vee\cdots\vee\pi_{n_m})=m\log 2;$$

$$h(\pi_k|\pi_j)=\begin{cases}h(\pi_k), & k\neq j;\\ 0, & k=j;\end{cases}$$

又若$\xi(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\omega)3^{-n}$，定义$\widetilde{\pi}_k:\Omega=\bigcup_{i=0}^{2}\widetilde{\Omega}_i^{(k)}$，其中$\widetilde{\Omega}_i^{(k)}=\{\omega;a_k(\omega)=i\}$，$i=0,1,2$. 于是$h(\widetilde{\pi}_k)=\log 3$;

$$h(\widetilde{\pi}_{n_1}\vee\widetilde{\pi}_{n_2}\vee\cdots\vee\widetilde{\pi}_{n_m})=m\log 3;$$

$$h(\widetilde{\pi}_1|\pi_1)=h(\widetilde{\pi}_1\vee\pi_1)-h(\pi_1).$$

由于$\widetilde{\pi}_1\vee\pi:\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\cup\Omega_4$，其中

$$\Omega_1=\left[0,\frac{1}{3}\right),\ \Omega_2=\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right),\ \Omega_3=\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right),\ \Omega_4=\left[\frac{2}{3},1\right],$$

所以

$$h(\widetilde{\pi}_1\vee\pi_1)=-\left(\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\log\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\log\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\log 3+\frac{1}{3}((\log 3+\log 2)=\log 3+\frac{1}{3}\log 2.$$

$$h(\tilde{\pi}_1|\pi_2)=\log 3+\frac{1}{3}\log 2-\log 2$$

$$=\log 3+\frac{2}{3}\log 2\neq\log 3=h(\tilde{\pi}_1).$$

$$h(\pi_1\vee\pi_2\vee\pi_3|\pi_k)=\begin{cases}h(\pi_1\vee\pi_2\vee\pi_3)=3\log 2, & \text{当 } k>3;\\ 2\log 2, & \text{当 } 1\leqslant k\leqslant 3 \text{ 时}.\end{cases}$$

例 13 令 $T\omega=2\omega-[2\omega](\omega\in[0,1])$，则 T 是保测变换．若

$$\omega=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\omega)2^{-n},$$

则

$$T\omega=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}(\omega)2^{-n}.$$

$$\pi_1:\Omega=\left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{2},1\right],$$

$$T^{-1}\pi_1:\Omega=\Omega_1\cup\tilde{\Omega}_1,\ \Omega_1=\left[0,\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right),$$

$$\tilde{\Omega}_1=\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{3}{4},1\right),$$

$$T^{-2}\pi_1:\Omega=\Omega_2\cup\tilde{\Omega}_2,$$

$$\Omega_2=\left[0,\frac{1}{8}\right)\cup\left[\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right)\cup\left[\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right)\cup\left[\frac{3}{4},\frac{7}{8}\right),$$

$$\tilde{\Omega}_2=\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right)\cup\left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{7}{8},1\right),$$

……………………………………………………

于是

$$\pi_1\vee T^{-1}\pi_1\vee\cdots\vee T^{-n}\pi_1=\bigcup_{k=1}^{2^n}\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right),$$

$$h(\pi_1\vee T^{-1}\pi_1\vee\cdots\vee T^{-n}\pi_1)=\log 2^n=n\log 2.$$

所以

$$h(\pi_1,T)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}h(\pi_1\vee T^{-1}\pi_1\vee\cdots\vee T^{-n}\pi_1)=\log 2,$$

进而不难得到 $h(\pi_k,T)=\log 2$.

T 的熵就是由它在所有有限分割下导出的平稳序列的不确定性(随机性)的最大值．这里所谓 T 在 $\pi\left(\Omega=\bigcup_{i=1}^{k}\Omega_i\right)$ 下导出的平稳序列指：$\eta_n(\omega)\triangleq\sum_{i=0}^{k}1_{\Omega_i}(T^n\omega)$.

遍历论的内容十分丰富,而且目前又是在不断发展的学科,本段作为初步介绍,现在是结束的时候了.

习　　题

1．试构造一个宽平稳过程,它不是均方连续的．

提示： 考虑一个相互独立同分布,均值为 0,方差为 1 的 $T=\boldsymbol{R}^+$ 上的过程．

2．设 η 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量,且 $Ee^{it\eta}$与 t 无关,

$$P(\eta\leqslant x)=F(x).$$

试证明 $\eta_t\triangleq e^{it\eta}$是一个宽平稳过程,并求出它的谱函数．

3．设 $\xi\triangleq\{\xi_t;t\in\boldsymbol{R}^1\}$为平稳过程,则其滑动和

$$\eta\triangleq\left\{\eta_t=\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_{t+s_k};t\in\boldsymbol{R}^1\right\}$$

仍为平稳过程(其中 a_k,s_k 为常数,$n=1,2,\cdots$).

4．设 $\xi(\omega)$是取值$[0,2\pi]$中的均匀分布随机变量,则

$$\xi\triangleq\{\xi_t(\omega)\}\triangleq\sin(\xi(\omega)+t\theta),t\in\boldsymbol{R}^+\}$$

是平稳过程,而且当$\dfrac{\theta}{2\pi}$是无理数时,则它是遍历的．

5．试证明例 2 结论.

进一步证明,若 $u_k(\omega)(k=1,\pm1,\cdots)$是实值、不相关、均值为零的随机列,$\lambda_k$ 是实数,$\sum_k Eu_k^2<\infty$,则 $y_t=\sum_k u_k e^{i\lambda_k t}$ 为宽平稳过程.

6．在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$中,令

$$\varphi_0 = \left\{\pi : \Omega = \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i : \pi \text{ 是 } \Omega \text{ 的分割}, k \geqslant 1\right\},$$

$$\varphi = \{B \subset \varphi_0; \forall\ \pi_1, \pi_2 \in B \text{ 都有 } h(\pi_1/\pi_2) + h(\pi_2/\pi_1) = 0\}.$$

对$\forall\ \pi_1 \in B_1, \pi_2 \in B_2$，定义

$$d(B_1, B_2) \equiv d(\pi_1, \pi_2) \triangleq h(\pi_1/\pi_2) + h(\pi_2/\pi_1).$$

试证 d 是 φ 上的一个距离，即(φ, d)是一个度量空间.

7. 在上题中证明

$$|h(\pi_1, T) - h(\pi_2, T)| \leqslant d(\pi_1, \pi_2),$$

因而 $h(\pi, T): \varphi \to \boldsymbol{R}^+$是$(\varphi, d)$上的连续函数.

8. 试证明对有限个元素的集合上的测度 μ，其相对熵 $h(\nu, \mu)$ 对 μ 是连续的.

9. 设测度空间$(\mathscr{S}, \boldsymbol{\Sigma})$上的概度测度 $\mu \ll \nu$，而且 μ, ν 都对测度 λ 绝对连续，而且

$$\mu(x) = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}(x),\ \nu(x) = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}(x)\ (\text{a.e.}\ \mathrm{d}\lambda),$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} = \frac{\mu(x)}{\nu(x)}\quad (\text{a.e.}\ \mathrm{d}\nu),$$

而且

$$h(\nu, \mu) = \int_{\mathscr{S}} \log \frac{\mu(x)}{\nu(x)} \mu(x) \lambda(\mathrm{d}x).$$

10. 设 $\mu, P(\cdot, \cdot)$分别是$(\mathscr{S}, \boldsymbol{\Sigma})$上的概率测度与正则条件概率测度. 令

$$\mu P(A) \triangleq \int \mu(\mathrm{d}x) P(x, A).$$

又设 μ, P 分别对 λ 绝对连续，试证明，对 P 有唯一的不变测度 ν (即$\nu P(A) = \nu(A)$对$\forall\ A \in \Sigma$ 成立)，$P \ll \nu, \nu \ll \lambda$，而且$h(\nu, \mu P) \leqslant h(\nu, \mu)$，式中等号成立的充要条件是

$$\frac{\mu(x)}{\nu(x)} = \text{const}\ \ (\text{a.e.}\ \mathrm{d}x).$$

提示： 利用函数 $\varphi(s)\triangleq s\log s$ 的凸性，以及

$$\int \frac{\nu(x)P(x,y)}{\nu(y)}\lambda(\mathrm{d}x) = 1.$$

11. 在上题中设 $\mathscr{S}$ 是一个有限集，又 P 为非周期，令

$$\mu P^n(A) = \int \mu P^{n-1}(\mathrm{d}x)P(x,A),$$

试证明：当 $n\to+\infty$ 且 $h(\nu,\mu)<+\infty$ 时，

$$\mu P^n(\{x\}) \to \nu(\{x\}).$$

提示： 本题即有限状态的马氏链的遍历定理的相对熵证明．利用 μP^n 的紧性及第 8，第 10 题结果．

12. 试证明一切不可约平稳马氏链 $\{\xi_n\}$ 均遍历．

提示： 利用命题 9.9，先对 $A,B\in\sigma(\xi_n;n\leqslant N)$ 验证命题所要求条件成立，并注意对不可约平稳马氏链永远有

$$\lim_{n\to 0}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}E_x(f(\xi_k,\xi_{k+1},\cdots,\xi_{k+m}) = E(f(\xi_0,\cdots,\xi_m))$$

对一切可积的有界可测 n 元 Borel 函数及 $m\geqslant 0$ 成立．

附　　录

附录Ⅰ　常用测度论定理

（一）单调类定理（测度论典型方法）

定义 0.1　Ω 的子集类 $\mathscr{Y}$ 称为 π 系，如果

$$A,B\in\mathscr{Y}\Longrightarrow A\cap B\in\mathscr{Y}.$$

定义 0.2　Ω 的子集类 $\mathscr{Y}$ 称为 d 系，如果

(i) 全集 $\Omega\in\mathscr{Y}$；

(ii) $A,B\in\mathscr{Y},A\subset B\Longrightarrow B\setminus A\in\mathscr{Y}$；

(iii) $A_n\in\mathscr{Y},A_n\uparrow\Longrightarrow\bigcup\limits_n A_n\in\mathscr{Y}$.

定理 0.1　设 $\mathscr{Y}$ 是 π 系，则含 $\mathscr{Y}$ 的最小 d 系就是 $\mathscr{Y}$ 生成的 σ-代数.

（参见[YWL].）

定理 0.2　设 Ω 的子集类 $\mathscr{Y}$ 是 π 系，$\mathscr{H}$ 是 Ω 上实函数组成的某个线性空间，它满足：

(H_1) $1\in\mathscr{H}$；

(H_2) $A\in\mathscr{Y}\Longrightarrow 1_A\in\mathscr{H}$；

(H_3) $f_n\in\mathscr{H},0\leqslant f_n\uparrow f$，$f$ 有限（对应地：f 有界），则 $f\in\mathscr{H}$.

在这些条件下，$\mathscr{H}$ 包含所有 $(\Omega,\sigma(\mathscr{Y}))$ 可测（对应地：有界可测）函数.

（二）独　立　性

定义 0.3 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上 $\mathscr{F}$ 的子集系 $\{\mathscr{C}_\alpha,\alpha\in T\}$ 称为独立系，

如果对任意 n 及任意 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in T$，任意 $A_i\in\mathscr{C}_i(i=1,\cdots,n)$，恒有

$$P(A_1\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)\cdots P(A_n).$$

命题 0.3 设 $\pi_\alpha\subset\mathscr{F}$，且(对 $\forall\ \alpha\in T$)是 π 系，则

$$\{\sigma(\pi_\alpha),\alpha\in T\}\text{是独立系}\Longleftrightarrow\{\pi_\alpha,\alpha\in T\}\text{是独立系}.$$

命题 0.4 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上随机变量 ξ 与随机过程 $\{\eta_t,t\in T\}$ 独立(即 $\sigma(\xi)$ 与 $\sigma(\eta_t),t\in T$) 独立) $\Longleftrightarrow\forall\ \zeta\in\sigma(\eta_t,t\in T)$ 都与 ξ 独立.

(三) 条件期望

定义 0.4 ξ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上随机变量，如果 $E\xi$ 有确切含义(可以是无穷值)，$\mathscr{Y}(\subset\mathscr{F})$ 是 σ-代数，那末 $E(\xi|\mathscr{Y})$ 定义为满足下式的唯一 $\mathscr{Y}$ 可测随机变量：

$$E(E(\xi|\mathscr{Y})1_A)=E(\xi 1_A)\quad(\forall\ A\in\mathscr{Y}).$$

$E(\xi|\mathscr{Y})$ 具有类似于 $E\xi$ 的许多性质，此外有

命题 0.5 ξ_n 一致可积且 $\xi_n\to\xi$ a.e. dP，那末

$$E(\xi_n|\mathscr{Y})\xrightarrow{L_1}E(\xi|\mathscr{Y})$$

(但是未必有 $E(\xi_n|\mathscr{Y})\to E(\xi|\mathscr{Y})$ a.e. dP).

命题 0.6 若 $f(x,y)$ 有界可测(或非负可测)，η 为 $\mathscr{Y}$ 可测，则有

$$E(f(\xi,\eta)|\mathscr{Y})=(E[f(\xi,y)|\mathscr{Y}])_{y=\eta}$$

特别，如果还有 ξ 与 $\mathscr{Y}$ 独立，那末

$$E(f(\xi,\eta)|\mathscr{Y})=Ef(\xi,y)|_{y=\eta}.$$

证明提示：先考虑 $f(x,y)=g(x)h(y)$ 的情况，再用典型逼近方法.

命题 0.7 设 $\xi\triangleq\{\xi_t;t\in T\}$ 是一族随机变量(T 是任意指标集，可以不可列)，对任意的一个随机变量 η，必存在 $\{t_n;n=1,2,\cdots\}$ 及 Borel 函数 $\varphi_n(n\geqslant1)$，使得

$$E(\eta|\sigma(\xi))=\lim\varphi_n(\xi_{t_1},\xi_{t_2},\cdots,\xi_{t_k},\cdots).$$

这个命题等价于任一 $\sigma(\xi)$ 可测函数都是 ξ 中可列个元素的 Borel 函数.

命题 0.8 在上面的命题中设 $E\eta^2<\infty$，令 $Y=E(\eta|\sigma(\xi))$，则

$$E(\eta-Y)^2=\min_{\hat{\eta}\in\sigma(\xi)}E(\eta-\hat{\eta})^2.$$

命题 0.9（可测映对 σ-代数的正则条件分布） 设 ξ 为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到可测空间 $(\mathscr{S},\Sigma)$ 的可测映射，而且满足条件

(A.1) $\exists\ A_n\in\Sigma$，使 $\Sigma=\sigma(A_n,n\geqslant 1)$；

(A.2) $\exists$ 子类 $\mathscr{C}\subset\Sigma$，满足紧相交性质（见第一章§4），且有

$$P(\xi\in A)=\sup_{\substack{C\subset A\\ C\in\mathscr{C}}}P(\xi\in C)\quad(\forall\ A\in\Sigma),$$

那末对任意 σ-代数 $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$，存在 $P(\omega,A)$ 满足

(C.1) $\forall\ \omega(\in\Omega)$ 固定时，$P(\omega,\cdot)$ 是 Σ 上概率；

(C.2) $\forall\ A(\in\Sigma)$ 固定时，$P(\cdot,A)\in\mathscr{G}$；

(C.3) $\forall\ A$ 固定时，$P(\xi\in A)|\mathscr{G})=P(\omega,A)$ a.e..

这个 $P(\omega,A)$ 称为 ξ 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件分布，也称为混合条件分布.

证明可参见[Yn_2].

注 1：若 $(\mathscr{S},\Sigma)=(\mathbf{R}^d,\mathscr{B}^d)$，则(A.1)，(A.2)恒成立.

注 2：若 $(\Omega,\mathscr{F})=(\mathscr{S},\Sigma)$ 且 $\xi=I$（恒等映射），则当(A.1)，(A.2)成立时，上述的 $P(\omega,A)=P(A|\mathscr{G})$ a.e. 称为 P 关于 $\mathscr{G}$ 的条件分布.

附录 II 关于独立增量过程的附记

独立增量过程是理论发展得最早，也最为成熟的随机过程，这里我们只列出一些最基本的结论，具体的细节与证明可参见[I_2]，[I_1]、[GS][WS]，[CK]等著作.

（一）随机连续的独立增量过程的特征函数 ——Levy-Khinchine 公式

随机过程 $\xi_\cdot$ 称为**随机连续**的，如果 $\forall\ \varepsilon>0$，

$$P(|\xi_t-\xi_{t_0}|\geqslant\varepsilon)\to 0\quad(t\to t_0).$$

1°(随机连续的独立增量过程 $\xi.$ 的增量的特征函数) 有如下的 Levy-Khinchine 公式

$$Ee^{i\lambda(\xi_t-\xi_s)}=e^{\psi(\lambda,t)-\psi(t,s)},\tag{0.1}$$

其中

$$\psi(\lambda,t)=i\lambda m(t)-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2(t)+\int(e^{i\lambda u}-1-i\lambda u1_{\{|u|<1\}})\pi(t,du))\tag{0.2}$$

$m(t),\sigma^2(t)$ 为连续函数，$\sigma^2(t)$ 非负不减，$\pi(t,\cdot)$ 是测度，满足

$$\pi(t,\{0\})=0,\quad \int_R(u^2\wedge 1)\pi(t,du)<\infty,\tag{0.3}$$

而且对于 $\forall\ \varepsilon>0$ 及 $\{|u|\geqslant\varepsilon\}$ 的任意 Borel 子集 $A,\pi(t,A)$ 是 t 的连续不减函数.

2°(时齐的随机连续(后者等价于右随机连续)的独立增量过程的特征函数)

$$Ee^{i\lambda\xi_t}=e^{t\psi(\lambda)},\tag{0.1$'$}$$

其中

$$\psi(\lambda)=i\lambda m-\frac{\lambda^2}{2}\sigma^2+\int(e^{i\lambda u}-1-i\lambda u1_{\{|u|<1\}})n(du)\tag{0.2$'$}$$

($1_{\{|u|<1\}}$ 可改为 $1_{\{|u|<\varepsilon\}}$，相应地 m 改为 m_ε)，$n(\cdot)$ 为测度，满足

$$n(\{0\})=0,\quad \int(u^2\wedge 1)n(du)<\infty,\tag{0.3$'$}$$

称为过程 $\xi.$ 的 Levy 测度((0.3)$'$ 中 1 可改为任意 $\varepsilon(>0)$).

注 1：(0.2)$'$ 中的 $\psi(\lambda)$ 也可写成

$$\psi(\lambda)=i\lambda m'-\frac{\lambda^2}{2}\sigma^2+\int\left(e^{i\lambda u}-1-\frac{i\lambda u}{1+u^2}\right)n(du).\tag{0.2$''$}$$

在计算时用(0.2)$''$常较为方便. 但是(0.2)$'$更明确地反映了 $\xi.$ 的轨道特点(参见后面的介绍).

常见的例子中有 Brown 运动：$m=0,n(\cdot)=0$；Poisson 过程：$m=\sigma^2=0$，$n(\{1\})=\mu,n(R\backslash\{1\})=0$；Cauchy 过程：$\sigma^2=0,n(du)=\frac{C}{\pi}\cdot\frac{du}{u^2}$.

注 2：显见 d 维过程 $\xi_\cdot$ 为独立增量当且仅当其分量的任意常系数线性组合均为独立增量，所以上面的公式有显见的 d 维推广.

（二）独立增量过程的一般形式与修正

1° 独立增量过程 ξ_t 的一般形式为

$$\xi_t = f(t) + \xi_t^{(c)} + \xi_t^{(d)}, \tag{0.4}$$

其中 $f(t)$ 为常函数，$\xi_t^{(c)}$ 为随机连续的独立增量过程，$\xi_t^{(d)}$ 称为离散的独立增量过程，即存在 $[0,\infty)$ 中非随机序列 t_k 及相互独立的独立随机变量列 $\{\eta_{t_k}\}$ 及 $\{\zeta_{t_k}\}$，使

$$\xi_t^d = \sum_{t_k<t}\eta_{t_k} + \sum_{t_k\leqslant t}\zeta_{t_k} \tag{0.5}$$

（级数为绝对收敛）. 此外 $\xi_\cdot^{(c)}$ 与 $\xi_\cdot^{(d)}$ 是相互独立的并分别为左连续和右连续的阶梯过程.

2° 随机连续的可分独立增量过程的几乎所有轨道均无第二类间断点，因而沿轨道的左、右极限分别存在.

3° 随机连续的独立增量过程 $\xi_\cdot$ **可修正为 Levy 过程**，即存在一个轨道以概率为 1 地右连续且有左极限的随机连续的独立增量过程 $\tilde{\xi}_\cdot$，使对于 $\forall\ t\geqslant 0$ 有

$$P(\xi_t = \tilde{\xi}_t) = 1.$$

3° 即定理 6.24 的推论 3.

注：以上结论也适合 d 维过程（本段内容详见[GS] Ⅱ，Ch Ⅳ）.

（三）时齐的 Levy 过程的轨道分解的粗略介绍

设 $\xi_\cdot$ 为 $\boldsymbol{R}^1$ 值的时齐 Levy 过程. 令

$$N_t(A) = \#\{\omega;\ s\leqslant t, \xi_s - \xi_{s-} \in A\},$$

其中 A 为 $\{u: |u|>\varepsilon\}$ 中的Borel 集. 可以证明 $N_t(A)$ 为参数 $tn(A)$ $\left(= t\int_A n(\mathrm{d}u)\right)$ 的 Poisson 过程，而且对于两两不交的 $A_1,\cdots,A_m$ 有：$N_t(A_1),\cdots,N_t(A_m)$ 相互独立. 这时

$$\mu(t,A) \equiv N_t(A) - tn(A)$$

是鞅(N_t 称为系于 ξ. 的 Poisson 点过程,$\mu(t,\cdot)$称为其鞅测度).

对 $f(u)=u1_{(|u|\geq\varepsilon)}$,可定义按轨道的随机积分 $\int f(u)N_t(\mathrm{d}u)$,这表示时刻 t 以前跳跃值 $\xi_s-\xi_{s-}$ 的 f 值:$f(\xi_s-\xi_{s-})$ 的总和. 对于 $g(u)\in L^2(\mathrm{d}n)$还可以定义按鞅测度 $\mu(t,\mathrm{d}u)$的积分 $\int g(u)\mu(t,\mathrm{d}u)$. 特别地,由于(0,3)′我们可取 $g(u)=u1_{(|u|<\varepsilon)}$. 我们叙述基本定理如下:

时齐 Levy 过程的轨道分解 对于时齐 Levy 过程 ξ_t,一定存在一个(轨道连续的)正态的 Levy 过程 $\xi_t^{(c)}$,它与 $N_t(A)$独立,而且有

$$\xi_t=\xi_t^{(c)}+\int u1_{(|u|>\varepsilon)}N_t(\mathrm{d}u)+\int_0^t\int u1_{(|u|\leqslant\varepsilon)}\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u) \quad (0.6)$$

($\xi_t^{(c)}=\xi_0+mt+\sigma^2B_t$,$B_t$ 为 Brown 运动).

对于非齐次 Levy 过程及 d 维情形,都有相应的分解,只需对(0.6)作一些显然的调整即可.

注:如果 Levy 测度 $n(\mathrm{d}u)$还满足:存在 $\varepsilon>0$ 使

$$\int|u|1_{(|u|\leqslant\varepsilon)}n(\mathrm{d}u)<\infty, \quad (0.7)$$

那末(0.6)可以简化为

$$\xi_t=\xi_t^{(c)}+\int uN_t(\mathrm{d}u), \quad (0.8)$$

其中 $\int uN_t(\mathrm{d}u)$恰为时刻 t 以前 ξ. 的所有跳跃 $\xi_s-\xi_{s-}$的总和,称为 ξ. 的纯跳部分.

可惜的是一般(0.7)并不满足,即 ξ. 的"小跳"的总和一般可能发散,因而不能有简洁的分解式(0.8).

当(0.7)成立时,$\int uN_t(\mathrm{d}u)$以概率为 1 地是下述极限

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\max_i(u_{i+1}^{(m)}-u_i^{(m)})\to 0}\sum_{\substack{i=0\\ u_0^{(m)}=0\\ u_{l^{(m)}}^{(m)}=m}}^{l^{(m)}-1}u_i^{(m)}N_t\big((u_i^{(m)},u_{i+1}^{(m)}]\big),$$

而且这极限在 $0 \leqslant t < \infty$ 对 t 局部一致地成立. 于是它的期望为 $t\int un(\mathrm{d}u)$. 这样 $\int |u| n(\mathrm{d}u)$ 就表示沿过程轨道上单位时间的跳跃的绝对跃度和的平均.

对 d 维情形也有与(0.6)对应的分解.

(四) 时齐 Levy 过程的特殊情形(Ⅰ)

这里介绍(0.2)′或(0.2)″的特例, 即 Levy 测度 $n(\mathrm{d}u)$ 还满足一些其它补充条件的情形.

1° 当 $\int u^2 n(\mathrm{d}u) < \infty$ (等价于 $D\xi_t < \infty$) 时, (0.2)′可简化为

$$\psi(\lambda) = \mathrm{i}m_0\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u} - 1 - \mathrm{i}\lambda u)\, n(\mathrm{d}u), \qquad (0.9)$$

再则, 当 $\int_{|u|\geqslant 1} |u| n(\mathrm{d}u) < \infty$ 时, (0.9)仍然成立.

2° 当 $\int_{|u|<1} |u| n(\mathrm{d}u) < \infty$ 时, (0.2)′可简化为

$$\psi(\lambda) = \mathrm{i}m_1\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u} - 1)\, n(\mathrm{d}u). \qquad (0.10)$$

事实上, 当 $E|\xi_t| < \infty$ 时, 有 $\int |u| n(\mathrm{d}u) < \infty$, 当然(0.10)成立.

3° 当 $\int n(\mathrm{d}u) < \infty$ 时, 令

$$\beta = \int n(\mathrm{d}u), \quad F(u) = \frac{1}{\beta}\int_{[-\infty, u]} n(\mathrm{d}u), \qquad (0.11)$$

那末 F 是分布函数. 显然这时 2°中条件满足. 又若 $m_1 = \sigma^2 = 0$, 则我们有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi_t} = \mathrm{e}^{t\int(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u}-1)n(\mathrm{d}u)} (\text{设 } \xi_0 = 0) = \mathrm{e}^{\beta t\left(\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u} F(\mathrm{d}u) - 1\right)}. \qquad (0.12)$$

可以构造独立同分布列 $\{X_n\}$, 使它们的分布为 F, 及 Poisson 过程 η_t, 使其参数为 β, 且与 $\{X_n\}$ 独立. 令

$$\tilde{\xi}_t = X_1 + \cdots + X_{\eta_t} \ (\text{项数随机化的独立和}),$$

则 $\tilde{\xi}_t$ 与 ξ_t 有相同的特征函数，即 $\{\xi_t\}$ 与 $\{\tilde{\xi}_t\}$ 有相同的分布律（易见 $\tilde{\xi}_t$ 也是齐次 Levy 过程）. 后者称为复合 Poison 过程，因为它的分布函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\beta t} (F)^{*n},$$

其中 $(F)^{*n}$ 为 $X_1+\cdots+X_n$ 的分布函数，$F^{*0}\equiv 1$. $\tilde{\xi}_t$ 与 η_t 有相同的跳跃时刻，$\beta=\int n(\mathrm{d}u)$ 为单位时间内平均跳跃的次数.

4° 当 $\int_{|u|<1} |u| n(\mathrm{d}u)<\infty$，但是 $\int n(\mathrm{d}u)=\infty$ 且 $m_1=\sigma^2=0$ 时，

$$E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi_t}=\mathrm{e}^{t\int(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u}-1)n(\mathrm{d}u)},$$

这时候 ξ_t 不再是复合 Poisson 过程了. 另一方面，这时候(0.8)成立，且 $\xi_t^{(c)}\equiv 0$，即

$$\xi_t=\int u N_t(\mathrm{d}u), \tag{0.13}$$

称为纯跳的 Levy 过程.

5° 当 $\int_0^\infty u n(\mathrm{d}u)<\infty$，$n((-\infty,0])=0$，且 $\sigma^2=0$，$m_1\geqslant 0$ 时，我们有

$$\psi(\lambda)=\mathrm{i}\lambda m_1+\int_0^\infty (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u}-1)n(\mathrm{d}u) \quad (m_1\geqslant 0). \tag{0.14}$$

这时候 $\xi_t-m_1 t$ 只有正的纯跳，ξ_t 称为（轨道）递增的 Levy 过程或单边 Levy 过程，有的书上也称为“从属子”(subordinator).

如果把上式中的 $\mathrm{i}\lambda$ 改为 $-p$（即形式地令 $\lambda=-p/\mathrm{i}$），得到 p 的函数 $-\varphi(p)$，其中

$$\varphi(p)\equiv m_1 p+\int_0^\infty (1-\mathrm{e}^{-pu})n(\mathrm{d}u), \tag{0.14$'$}$$

那末 ξ_t 的 Laplace 变换为

$$E\mathrm{e}^{-p\xi_t}=\mathrm{e}^{-t\varphi(p)}. \tag{0.15}$$

以上各项在 d 维情形都有自然的对应结论.

（五）时齐 Levy 过程的特殊情形（Ⅱ）——稳定过程

0° 时齐的 Levy 过程 $\xi_\cdot$ 称为稳定过程,如果 $\xi_0=0$ 而且对 $\forall\ t$, ξ_t 是具稳定分布的随机变量. 一个随机变量 X 称为具有稳定分布,如果与 X 同分布的彼此独立的 X_1,X_2 及 $\forall\ \alpha_1,\alpha_2>0$, $\exists\ \beta>0$ 使 $\alpha_1X_1+\alpha_2X_2$ 与 βX 同分布(记成 $\alpha_1X_1+\alpha_2X_2\overset{d}{=}\beta X$).

令 $f(\lambda)$ 为 X 的特征函数,则 X 具稳定分布等价于: $\forall\ \alpha_1,\alpha_2>0$, $\exists\ \beta>0$ 使

$$f(\alpha_1\lambda)f(\alpha_2\lambda)=f(\beta\lambda)\ (\forall\ \lambda\ 实).$$

于是时齐的 Levy 过程 $\xi_\cdot$ 为稳定过程当且仅当 $\forall\ \alpha_1,\alpha_2>0$, $\exists\ \beta>0$ 使

$$\psi(\alpha_1\lambda)+\psi(\alpha_2\lambda)=\psi(\beta\lambda). \tag{0.16}$$

为求 $\psi(\lambda)$ 的一般形式,不妨假定 $\psi\not\equiv0$. 取 $\alpha_1=\alpha_2=1$,由此存在 β_2 使 $2\psi(\lambda)=\psi(\beta_2\lambda)$. 用(0.16)及归纳法便知 $\exists\ \beta_n$ 使 $n\psi(\lambda)=\psi(\beta_n\lambda)$. 往证对于 $\forall$ 实数 $a>0$, $\exists\ \beta_a>0$ 使

$$a\psi(\lambda)=\psi(\beta_a\lambda). \tag{0.17}$$

首先,当 a 为有理数 $\frac{m}{n}$ 时我们有

$$\frac{m}{n}\psi(\lambda)=\frac{\psi(\beta_m\lambda)}{n}=\frac{1}{n}\psi\left(\beta_n\cdot\frac{\beta_m}{\beta_n}\lambda\right)=\frac{n}{n}\psi\left(\frac{\beta_m}{\beta_n}\lambda\right). \tag{0.17'}$$

只要取 $\beta_{\frac{m}{n}}=\frac{\beta_m}{\beta_n}$ 就满足(0.17)的要求.

再则,我们指出对应于有理数 r, β_r 是唯一确定的. 事实上,如果相反,则 $\exists\ 0<\beta_r<\beta_r'$ 使

$$\psi(\beta_r\lambda)=\psi(\beta_r'\lambda).$$

于是

$$\psi\left(\frac{\beta_r}{\beta_r'}\lambda\right)=r\psi\left(\frac{1}{\beta_r'}\lambda\right)=r\cdot\frac{1}{r}\psi(\lambda)=\psi(\lambda).$$

由此

$$\psi(\lambda)=\psi\left(\left(\frac{\beta_r}{\beta'_r}\right)^n\lambda\right)\to\psi(0)=0,$$

与 $\psi\neq0$ 矛盾.

这样,利用(0.17′)就推出:对有理数 $p,q>0$

$$\beta_p\beta_q=\beta_{pq}.$$

注意到 $p\leqslant1$ 时有 $\beta_p\leqslant1$,因若不然,则由

$$\psi(\lambda)=p^n\psi(\beta_p^{-n}\lambda)\to\psi(0)=0$$

又导致了与 $\psi\neq0$ 的矛盾.

由此,若 $p\leqslant q$,则 $\beta_p=\beta_{p/q}\beta_q\leqslant\beta_q$,即从有理数 p 到 β_p 的对应是单调的. 设 $r\to1$ 时对应 β_r 的某个子列趋于 β,那末由 $\psi(\beta_r\lambda)=r\psi(\lambda)$便得 $\psi(\beta\lambda)=\psi(\lambda)$,因此 $\beta=1$. 这样由 β_p 对 p 的乘法性质立刻推出 β_p 关于 p 为局部(即在任意闭的有理数区间上)一致连续,从而可以扩张为正实数 a 上的连续函数 β_a,满足(0.17)及乘法性质

$$\beta_{a_1}\beta_{a_2}=\beta_{a_1a_2}.$$

于是 β_a 为幂函数:∃ $\alpha>0$ 使 $\beta_a=a^{\frac{1}{\alpha}}$,并且

$$a^\alpha\psi(\lambda)=\psi(a\lambda). \tag{0.18}$$

由此对 $a>0$ 有

$$\psi(a)=a^\alpha\psi(1),$$
$$\psi(-a)=\overline{\psi(a)}=a^\alpha\,\overline{\psi(1)}.$$

令 $\psi(1)=-c_0+\mathrm{i}c_1$,那末

$$\psi(\lambda)=|\lambda|^\alpha(-c_0+\mathrm{i}c_1\mathrm{sgn}\lambda)\quad(\alpha>0). \tag{0.19}$$

由于 $|\mathrm{e}^{t\psi(\lambda)}|\leqslant1$,故恒有 $c_0\geqslant0$. α 称为稳定过程的阶.

顺便指出,由(0.18)立刻可得对应的稳定过程应有 $\xi_{at}\overset{d}{=}a^{\frac{1}{\alpha}}\xi_t$.

另一方面,由(三)我们有

$$\int f(u)n(\mathrm{d}u)=E\Big(\sum_{0<t\leqslant1}f(\xi_t-\xi_{t-})\Big).$$

于是可以得到 $\psi(\lambda)$的另一个形式：一方面，对于 $a>0$，Levy 过程 $a\xi_t$ 对应的 $\psi_{a\xi}(\lambda)$ 应为 $\psi(a\lambda)=a^\alpha\psi(\lambda)$，所以其 Levy 测度应为 $a^\alpha n(\mathrm{d}u)$；另一方面，它又应是 $a\xi_t$ 在单位时间内跳跃高度属于 $\mathrm{d}u$ 中的次数的均值，即是 ξ_t 在单位时间内跳跃高度属于 $\mathrm{d}u/a$ 中的次数的均值. 这说明

$$a^\alpha n(\mathrm{d}u)=n(\mathrm{d}u/a).$$

于是

$$\int_x^\infty n(\mathrm{d}u)=\int_1^\infty n(x\mathrm{d}u)=\int_1^\infty x^{-\alpha}n(\mathrm{d}u)=x^{-\alpha}\int_1^\infty n(\mathrm{d}u).$$

可见当 $u>0$ 时，$n(\mathrm{d}u)$有密度 $C/u^{\alpha+1}$. 同样在 $u<0$ 时，有密度$\tilde{C}/|u|^{\alpha+1}$. 即

$$n(\mathrm{d}u)=\begin{cases}\dfrac{C}{u^{\alpha+1}}, & u>0;\\[2mm] \dfrac{\tilde{C}}{|u|^{\alpha-1}}, & u<0.\end{cases} \tag{0.20}$$

若 $C=\tilde{C}=0$，则 $\psi(\lambda)=\mathrm{i}m\lambda-\dfrac{\sigma^2}{2}\lambda^2$. 由(0.19)便得 $m=0,\alpha=2$，从而 $\xi_t\sim N(0,\sigma^2 t)$. 所以指数为 2 的稳定过程是正态的时齐 Levy 过程(即 Brown 运动).

若 C 或 $\tilde{C}$ 为正，则由 $\int_{-1}^{1}u^2n(\mathrm{d}u)<\infty$及(0.20)可知 $0<\alpha<2$.

于是我们得到

1° 稳定过程的阶 α 满足 $0<\alpha\leqslant2$，当 $\alpha=2$ 时是正态的时齐 Levy 过程(即 Brown 运动).

下面对不同的 α 分别讨论：

情形 1 $0<\alpha<1$.

这时由(0.20)可知 $\int_{-\infty}^{\infty}n(\mathrm{d}u)=\infty$，即单位时间的平均跳跃次数为无限，而且$\int_{-\infty}^{\infty}|u|n(\mathrm{d}u)<\infty$，因此 $\psi(\lambda)$采取(0.10)的形式：

$$\psi(\lambda)=\mathrm{i}m_1\lambda-\frac{\sigma^2}{2}\lambda^2+\tilde{C}\int_{-\infty}^{0}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u}-1)\frac{\mathrm{d}u}{|u|^{\alpha+1}}+C\int_0^\infty(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u}-1)\frac{\mathrm{d}u}{u^{\alpha+1}}$$

$$=\mathrm{i}m_1\lambda-\frac{\sigma^2}{2}\lambda^2+|\lambda|^\alpha\left(C\int_0^\infty(\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}-1)\frac{\mathrm{d}v}{v^{\alpha+1}}+\tilde{C}\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}v}-1)\frac{\mathrm{d}u}{v^{\alpha+1}}\right)$$

$(C+\tilde{C}>0)$. 利用围道积分可以求得[CK]对 $0<\alpha<1$,

$$\int_0^\infty(\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}v}-1)\frac{\mathrm{d}v}{v^{\alpha+1}}=-\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\alpha}.$$

于是

$$\psi(\lambda)=\mathrm{i}m_1\lambda-\frac{\sigma^2}{2}\lambda^2-|\lambda|^\alpha\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\left(C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\alpha\operatorname{sgn}\lambda}+\tilde{C}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\alpha\operatorname{sgn}\lambda}\right).$$

把它与(0.10)比较可知 $m_1=\sigma^2=0$. 从而

$$\psi(\lambda)=-|\lambda|^\alpha\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\left(C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\alpha\operatorname{sgn}\lambda}+\tilde{C}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\alpha\operatorname{sgn}\lambda}\right)\tag{0.21}$$

$$=C\int_0^\infty(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u}-1)\frac{\mathrm{d}u}{u^{\alpha+1}}+\tilde{C}\int_{-\infty}^0(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u}-1)\frac{\mathrm{d}u}{|u|^{\alpha+1}}\tag{0.21'}$$

$(C+\tilde{C}>0)$. 由(四)4°可知 ξ_t 是纯跳的时齐 Levy 过程.

又由于 $\xi_0=0$ 及 $\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\operatorname{sgn}\lambda\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)$, 我们有

$$|E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi_t}|=|\mathrm{e}^{t\psi(\lambda)}|=\mathrm{e}^{-|\lambda|^\alpha\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}(C+\tilde{C})\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\in L^1\cap L^2.$$

由 Fourier 变换的 L^1 和 L^2 理论可知 $f(\lambda)\equiv E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi_t}$的 Fourier 变换连续且属于 L^1, 从而就是 ξ_t 的分布密度, 也就是说, ξ_t 有连续的分布密度.

情形 2 $1<\alpha<2$.

这时由(0.20)可知

$$\int_{-\infty}^\infty n(\mathrm{d}u)=\infty,\quad\int_{-\infty}^\infty|u|n(\mathrm{d}u)=\infty,\quad\int_{|u|\geqslant1}|u|n(\mathrm{d}u)<\infty.$$

因此, 由(四)1° $\psi(\lambda)$ 可取(0.10)的形式:

$$\psi(\lambda)=\mathrm{i}m_0\lambda-\frac{\sigma^2}{2}\lambda^2+C\int_0^\infty(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u}-1-\mathrm{i}\lambda u)\frac{\mathrm{d}u}{u^{\alpha+1}}$$

$$+\tilde{C}\int_{-\infty}^0(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u}-1-\mathrm{i}\lambda u)\frac{\mathrm{d}u}{|u|^{\alpha+1}}\quad(C+\tilde{C}>0).$$

分部积分给出

$$\int_0^{\infty}(e^{i\lambda u}-1-i\lambda u)\frac{du}{u^{\alpha+1}}=\frac{i\lambda}{\alpha}\int_0^{\infty}(e^{i\lambda u}-1)\frac{du}{u^{\alpha}},$$

$$\int_{-\infty}^{0}(e^{i\lambda u}-1-i\lambda u)\frac{du}{|u|^{\alpha+1}}=-\frac{i\lambda}{\alpha}\int_{-\infty}^{0}(e^{i\lambda u}-1)\frac{du}{|u|^{\alpha}}.$$

由于 $0<\alpha-1<1$，用 $\alpha-1$ 代替情形 1 中的 α 后利用那里的公式得到

$$\psi(\lambda)=im_0\lambda-\frac{\sigma^2}{2}\lambda^2-|\lambda|^{\alpha}\mathrm{sgn}\lambda\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}i\left(Ce^{i\frac{\pi}{2}(\alpha-1)\mathrm{sgn}\lambda}-\widetilde{C}e^{i\frac{\pi}{2}(\alpha-1)\mathrm{sgn}\lambda}\right).$$

同样地把它同(0.19)作比较可得 $m_0=\sigma^2=0$，从而

$$\begin{aligned}\psi(\lambda)&=-|\lambda|^{\alpha}\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}\Big[(C+\widetilde{C})\sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha-1)\right)\\&\quad+i(C-\widetilde{C})\mathrm{sgn}\lambda\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha-1)\right)\Big] \qquad (0.22)\\&=C\int_0^{\infty}(e^{i\lambda u}-1-i\lambda u)\frac{du}{u^{\alpha+1}}+\widetilde{C}\int_{-\infty}^{0}(e^{i\lambda u}-1-i\lambda u)\frac{du}{|u|^{\alpha+1}}. \qquad (0.22)'\end{aligned}$$

情形 3 $\alpha=1$.

这时候我们用(0.2)″形式. 注意到由对称性及分部积分

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{i\lambda u}-1-i\lambda u/(1+u^2))\frac{du}{u^2}&=2\int_0^{\infty}(\cos\lambda u-1)\frac{du}{u^2}\\&=2(\cos\lambda u-1)\left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_0^{\infty}-2\lambda\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda u}{u}du\\&=-2\lambda\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\lambda=-\pi|\lambda|.\end{aligned}$$

于是

$$\psi(\lambda)=im'\lambda-\frac{\sigma^2}{2}\lambda^2-C\pi|\lambda|.$$

与(0.19)比较可知 $\sigma^2=0$. 从而

$$\begin{aligned}\psi(\lambda)&=im'\lambda-C\pi|\lambda|\overset{\text{记成}}{=\!=}im'\lambda-C_0|\lambda| \qquad (0.23)\\&=im'\lambda+\frac{C_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\lambda u}-1-\frac{i\lambda u}{1+u^2}\right)\frac{du}{u^2}. \qquad (0.23)'\end{aligned}$$

对应的过程 ξ_t 具 Cauchy 分布密度

$$\frac{1}{\pi}\ \frac{C_0 t}{(C_0 t)^2+(x-m't)^2},$$

所以 ξ_t 称为 Cauchy 过程，在第五章 § 2 中我们已证明了：概率为 1 地 Cauchy 过程的轨道的不连续点在 $[0,\infty)$ 上处处稠密.

于是我们有

2° 对 $0<\alpha<2$，α 阶稳定过程的 $\psi(\lambda)$ 分别由(0.21)～(0.23)(或(0.21)′～(0.23)′)给出. 当 $\alpha<1$ 时，过程为纯跳的；1 阶稳定过程为 Cauchy 过程；当 $\alpha\leqslant 1$ 时，过程也有分布密度.

3° 稳定过程 ξ_t 称为对称的，如果 $-\xi_t$ 与 ξ_t 同分布，它等价于 $\psi(-\lambda)=\psi(\lambda)$，即 $\psi(\lambda)$ 是实值的. 正态时齐 Levy 过程是对称的 2 阶稳定过程. Cauchy 过程为一阶对称稳定过程当且仅当 $m'=0$. 其它阶的稳定过程为对称的当且仅当 $C=\tilde{C}$.

纯正跳的稳定过程称为单边稳定过程. 单边稳定过程的阶 α 必须小于 1. 在第五章 § 3 命题 5.19 中我们给出了一个 $\frac{1}{2}$ 阶单边稳定过程的实际例子，即

$$\alpha=\frac{1}{2},\ \tilde{C}=0,\ C=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

由(0.21)得

$$\begin{aligned}\psi(\lambda)&=-\ |\lambda|^{1/2}(1-\mathrm{i}\ \mathrm{sgn}\lambda)=-\ |\lambda|^{1/2}(-2\mathrm{i}\ \mathrm{sgn}\lambda)^{1/2}\\&=-\sqrt{-2\mathrm{i}\lambda}\equiv-g(\mathrm{i}\lambda),\end{aligned}$$

其中

$$g(z)\equiv\sqrt{-2z}.$$

对于这个过程，一般用 Laplace 变换描述更为简单. 由于 $E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi_t}=\mathrm{e}^{-tg(\mathrm{i}\lambda)}$，于是对于 $s>0$ 有

$$E\mathrm{e}^{\ s\xi_t}=\mathrm{e}^{-tg(-s)}=\mathrm{e}^{-t\sqrt{2s}}.$$

也就是说，对应于

$$\psi(\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u}-1)\frac{\mathrm{d}u}{u^{3/2}}$$

的 $\frac{1}{2}$ 阶单边稳定过程的 Laplace 变换为 $\mathrm{e}^{-t\sqrt{2s}}$. 这事实对应于等

式

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{-su}-1)\frac{\mathrm{d}u}{u^{3/2}}=\mathrm{e}^{-\sqrt{2s}}\quad(s>0).$$

注 1:限于篇幅,本书略去众知的事实:任意一个稳定分布必是无穷可分的,因而总能作为稳定过程的分布.

注 2:在稳定过程的定义中所涉及的稳定分布的定义要比独立同分布律的极限定理中涉及的稳定律的定义要强,后者仅要求:

若 X,X_1,X_2 同分布,X_1,X_2 独立,对$\forall\ a_1,a_2>0$,$\exists\ \beta>0$ 及 γ,使 $a_1X_1+a_2X_2$ 与 $\beta X+\gamma$ 同分布(在我们的定义中要求 $\gamma=0$).

有些书上称稳定过程中出现的稳定分布($\gamma=0$ 情形)为狭义的,而称在极限理论中出现的稳定分布为宽义的.

以上讨论也可自然地推广到多维情形.

(六) 时齐 Levy 过程的生成元,复合 Poisson 过程列的弱极限

1° 时齐的 Levy 过程作为时齐的 Markov 过程的特例,可以考虑生成元 $\mathscr{A}$,我们有 $C_0^2\subset\mathscr{D}(\mathscr{A})$,而且对于 $f\in C_0^2$ 有

$$\mathscr{A}f(x)=mf'+\frac{1}{2}\sigma^2f''+\int\left(f(x+u)-f(x)-f'(x)u1_{\{|u|<1\}}\right)n(\mathrm{d}u).\tag{0.24}$$

多维情形只要作相应的修改便得到相应公式.

2°时齐的独立增量过程$\xi.$为随机连续的,当且仅当其半群 $T_tf(x)=E_xf(\xi_t)$强连续.

证明 这是有界收敛性的直接推论.

3° 对于时齐的 Levy 过程 $\xi.$,必存在参数为 n 的复合 Poisson 过程列 $\xi_\cdot^{(n)}$,使 $\xi_\cdot^{(n)}$在$(D(\boldsymbol{R}^+),\mathscr{B}(D(\boldsymbol{R}^+)))$中弱收敛到 $\xi..$

证明 首先,我们先求复合 Poisson 过程的生成元.比较(0.24),(0.6)与(0.2)'便得对于复合 Poisson 过程而言,其生成

元应为

$$\mathscr{A}f(x)=\int(f(x+u)-f(x))n(\mathrm{d}u)$$

$$=\beta\int(f(x+u)-f(x)F(\mathrm{d}u)\quad\left(\beta\equiv\int n(\mathrm{d}u)\right)$$

$$=\beta\mathscr{F}f-\beta f=\beta(\mathscr{F}-1)f,$$

其中 $\mathscr{F}f\equiv\int f(x+u))F(\mathrm{d}u)$.

其次,我们注意 ξ_t 的转移函数 $P(t,x,\Gamma)$ 满足:

$$P(t,x,\Gamma+x)=P(\xi_t\in\Gamma+x|\xi_0=x)$$

$$=P(\xi_t-\xi_0\in\Gamma|\xi_0=x)=P(\xi_t-\xi_0\in\Gamma).$$

右式与 x 无关,所以

$$P(t,x,\Gamma+x)=P(t,0,\Gamma).$$

于是

$$T_tf(x)=\int f(y)P(t,x,\mathrm{d}y)=\int f(u+x)P(t,0,\mathrm{d}u)\triangleq\mathscr{P}_tf.$$

可见对于有界 Borel 可测函数 f,

$$\mathscr{A}^{(n)}f\equiv\frac{T_{\frac{1}{n}}f-f}{\frac{1}{n}}=n\left(\mathscr{P}_{\frac{1}{n}}-1\right)f$$

是参数为 $\beta=n,F=P\left(\frac{1}{n},0,\mathrm{d}u\right)$ 的复合 Poisson 过程的生成元.

另一方面,对于 $f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$($\mathscr{A}$ 为 $\xi_\cdot$ 的生成元),显然有

$$\mathscr{A}^{(n)}f\to\mathscr{A}f\ (n\to\infty).$$

注意到 $T_tu=\left(T_{\frac{t}{k}}\right)^ku$,用归纳法可证对 $\mathscr{A}^{(n)}$ 的半群 $T_t^{(n)}$ 有

$$\|T_t^{(n)}f-T_tf\|\leqslant k\|T_{\frac{t}{k}}^{(n)}f-T_{\frac{t}{k}}f\|=t\left\|\frac{T_{\frac{t}{k}}^{(n)}-I}{\frac{t}{k}}f-\frac{T_{\frac{t}{k}}-I}{\frac{t}{k}}f\right\|$$

$$\xrightarrow{k\to\infty}t\|\mathscr{A}^{(n)}f-\mathscr{A}f\|\quad(f\in\mathscr{D}(\mathscr{A})).\tag{0.25}$$

所以有

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|T_t^{(n)}f-T_tf\|\to0\ (f\in\mathscr{D}(\mathscr{A}),n\to\infty).$$

进而由 $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ 在有界 Borel 可测函数空间中的稠性，利用泛函分析中熟知的事实，便得上面的极限对所有有界 Borel 函数 f 仍然成立.

取 $f=1_\Gamma$，我们有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|P^{(n)}(t,x,\Gamma)-P(t,x,\Gamma)|\to 0\ (n\to\infty), \quad (0.26)$$

其中 $P^{(n)}(t,x,\Gamma)$ 是 $\mathscr{A}^{(n)}$ 对应的转移函数. 由此可知 $\mathscr{A}^{(n)}$ 对应的复合 Poisson 过程的一切有限维分布函数收敛到 ξ. 的相应的有限维分布函数.

另一方面，由于 $P(t,x,\Gamma)$ 满足一致 $o(1)$ 条件(定理 6.24)，利用(0.26)便得到：对于 $P^{(n)}(t,x,\Gamma)$ 而言，对应于在定理 6.18 前所定义的 $\psi_\varepsilon^{(n)}(\delta)$ 有：

$$\psi_\varepsilon^{(n)}(\delta)\leqslant\psi_\varepsilon(\delta)+\sup_{\substack{x\\0\leqslant t\leqslant\delta}}|P^{(n)}(t,x,B(x,\varepsilon)^c)-P(t,x,B(x,\varepsilon)^c)|$$

$$=o(1)\ (\text{对 } n \text{ 一致}).$$

于是由定理6.24推论2推出 $\xi^{(n)}$ 生成的 $\mathscr{P}(D(\boldsymbol{R}^+))$ 中的测度 $P\circ(\xi^{(n)})^{-1}$ 是相对紧的. 从而有∃ n_k 使

$$P\circ(\xi^{(n_k)})^{-1}\xrightarrow{w}P\circ\xi^{-1}.$$

附录 Ⅲ　Markov 过程生成的测度的绝对连续性

本段可参考[GS₂].

设 Ω 上 σ 代数族 $\mathscr{F}_n\uparrow\mathscr{F}$，$(\Omega,\mathscr{F})$ 上有两个概率测度 $P_i(i=1,2)$，记它们在 $\mathscr{F}_n$ 上的限制为

$$P_i^{(n)}\triangleq P|_{\mathscr{F}_n}.$$

假定对一切 n 有

$$P_2^{(n)}\ll P_1^{(n)}, \quad (0.27)$$

那末对于 P_1 来说，按定义可验证 Radon-Nykodim 导数

$$\rho_n\triangleq\frac{\mathrm{d}P_2^{(n)}}{\mathrm{d}P_1^{(n)}}$$

是关于 $\mathscr{F}_n$ 的非负鞅. 再由 $\int \rho_n \mathrm{d}P_1^{(n)}=1$ 可知这个非负鞅a.e.($\mathrm{d}P_1$)且 L_1 收敛,记它的极限为 ρ. 于是我们有

1° 在(0.27)下,$P_2 \ll P_1$,当且仅当

$$\int \rho \mathrm{d}P_1=1\left(\text{此时有}\frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}P_1}=\rho\right). \tag{0.28}$$

证明 充分性. 记 P_2 关于 P_1 的 Hahn 分解为

$$P_2=\alpha P+\beta Q\ (P\ll P_1, Q\perp P_1),$$

其中 P,Q 为概率测度,且

$$\alpha+\beta=1.$$

由定义可直接验证在 P_1 下

$$\rho_n^{(P)}\triangleq\frac{\mathrm{d}P^{(n)}}{\mathrm{d}P_1^{(n)}},\quad \rho_n^{(Q)}\triangleq\frac{\mathrm{d}Q^{(n)}}{\mathrm{d}P_1^{(n)}}$$

关于($\mathscr{F}_n$)都是鞅(这里我们注意 $P^{(n)},Q^{(n)}\ll P_1^{(n)}$),而且

$$\rho_n^{(P)}=E\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}P_1}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right)\xrightarrow{\text{a.e. 且 } L_1(\mathrm{d}P_1)}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}P_1},$$

$$\rho_n^{(Q)}\to\text{某个 }\rho^{(Q)}\ (\text{a.e. }\mathrm{d}P_1).$$

由 Fatou 引理,对于非负 $\mathscr{F}_n$ 可测有界函数 f,我们有

$$\int f\rho^{(Q)}\mathrm{d}P_1\leqslant \varliminf_m\int f\rho_m^{(Q)}\mathrm{d}P_1=\int f\rho_n^{(Q)}\mathrm{d}P_1^{(n)}=\int f\mathrm{d}Q^{(n)}=\int f\mathrm{d}Q.$$

由测度论典型方法可得

$$\int_A \rho^{(Q)}\mathrm{d}P_1\ll Q.$$

但是 $P_1\perp Q$,因此必须有 $\rho^{(Q)}=0$,从而 $\rho=\alpha\rho^{(P)}$.

再则我们有

$$1=\int\rho\mathrm{d}P_1=\alpha\int\rho^{(P)}\mathrm{d}P_1=\alpha,$$

所以 $P_2=P\ll P_1$.

(0.28)的必要性是显然的.

推论 若 Markov 过程(不一定齐次)$\xi_1(t)$,$\xi_2(t)$有相同的转

移函数 $P(s,x,t,\Gamma)$，但是初分布

$$\mu_2 \ll \mu_1,$$

则 $\xi_i(t)(0\leqslant t\leqslant T)$生成的测度 P_i 有

$$P_2 \ll P_1,\ \frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}P_1}(\omega)=\frac{\mathrm{d}\mu_2}{\mathrm{d}\mu_1}(\omega(0)),$$

其中 $\omega=\{\omega(t):0\leqslant t\leqslant T\}$.

证明 令

$$\mathscr{F}_n=\sigma\{\omega(t):t \text{ 遍取}[0,T]\text{中形为 } m/2^n \text{ 的点}\},$$

$$P_i^{(n)}=P_i|_{\mathscr{F}_n},$$

那末由 $\mu_2\ll\mu_1$ 知道 $P_2^{(n)}\ll P_1^{(n)}$，而且

$$\frac{\mathrm{d}P_2^{(n)}}{\mathrm{d}P_1^{(n)}}(\omega)=\frac{\mathrm{d}\mu_2}{\mathrm{d}\mu_1}(\omega(0))\triangleq\rho(\omega).$$

显见这个 ρ 满足(0.28). 由 1°便得 $P_2\ll P_1$.

2° (0.28)等价于

$$\frac{\mathrm{d}P_2^{(n)}}{\mathrm{d}P_1^{(n)}}\text{关于 } \mathrm{d}P_1 \text{ 一致可积.} \tag{0.28$'$}$$

3° $\mathscr{F}=\sigma\left(\bigcup_n \mathscr{F}_n\right)$，$(\Omega,\mathscr{F})$上存在概率测度列 $P_i^{(n)}(i=1,2)$ 满足

(C₁) $P_i^{(n)}(A)\to P_i(A)\ \left(\forall\ A\in \bigcup_n \mathscr{F}_n\right)$；

(C₂) $\rho_n\triangleq\dfrac{\mathrm{d}P_2^{(n)}}{\mathrm{d}P_1^{(n)}}$在如下意义下为 $P_1^{(n)}$ 一致可积：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，使

$$\int \rho_n 1_{\{\rho_n\geqslant N\}}\mathrm{d}P_1^{(n)}<\varepsilon, \tag{0.29}$$

则有 $P_2\ll P_1$.

证明 对于$\forall\ A\in \bigcup^{n} \mathscr{F}_n$ 有

$$P_2(A)=\lim_{n\to\infty}\int_A \rho_n \mathrm{d}P_1^{(n)}\leqslant N\lim_{n\to\infty}P_1^{(n)}(A)+\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_A \rho_n 1_{\{\rho_n\geqslant N\}}\mathrm{d}P_1^{(n)}$$
$$<NP_1(A)+\varepsilon. \tag{0.30}$$

由于满足(0.30)的集合组成单调类,所以(0.30)对于 $A\in\mathscr{F}$ 仍正确.

现在,如果对 $A\in\mathscr{F}$ 有 $P_1(A)=0$,则由(0.30)便得 $P_2(A)=0$,也就是 $P_2\ll P_1$.

推论 设 Markov 过程 $\xi_i(t)(i=1,2,0\leqslant t\leqslant T)$ 生成的测度为 P_i,转移函数为 $P_i(s,x,t,\Gamma)$. 如果下列条件成立:

(C.A.1) $P_2(s,x,t,\mathrm{d}y)\ll P_1(s,x,t,\mathrm{d}y)$,记

$$\rho(s,x,t,y)\triangleq\frac{\mathrm{d}P_2(s,x,t,y)}{\mathrm{d}P_1(s,x,t,y)};$$

(C.A.2) ∃ 常数 C 使

$$\int\rho(s,x,t,y)\log\rho(s,x,t,\mathrm{d}y)P_1(s,x,t,\mathrm{d}y)\leqslant C(t-s);$$

(C.A.3) $\xi_i(0)$的分布 μ_i 满足 $\mu_2\ll\mu_1$.

那末 $P_2\ll P_1$.

证明 记由$(\mu_1,P_2(s,x,t,\Gamma))$产生的 Markov 过程的测度为 $\widetilde{P}$,由 1°推论可知 $P_2\ll\widetilde{P}$.

取

$$0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots t_n^{(n)}=T,$$

使

$$\Lambda_n\triangleq\{t_k^{(n)},k\leqslant n\}\uparrow,\text{且}\bigcup_n\Lambda_n\text{ 在}[0,T]\text{中稠}.$$

记

$$\mathscr{F}_n=\sigma\{\omega(t);t\in\Lambda_n\},\ \widetilde{P}^{(n)}=\widetilde{P}|_{\mathscr{F}_n},$$

$$\rho_n\triangleq\frac{\mathrm{d}\widetilde{P}^{(n)}}{\mathrm{d}P_1^{(n)}}(\xi_1(\cdot))=\prod_{k=1}^{n-1}\rho(t_k^{(n)}),$$

其中

$$\rho(t_k^{(n)})\triangleq\rho(t_k^{(n)},\xi_1(t_k^{(n)}),t_{k+1}^{(n)},\xi_1(t_{k+1}^{(n)})).$$

显见 3°中(C.1)满足. 为验证(0.29),由 Chebyshev 不等式,我们只需证明:对 n 一致地有

$$E^{(1)}(\rho_n\log\rho_n)=\int\rho_n\log\rho_n\mathrm{d}P_1^{(n)}\leqslant\text{常数},$$

这里 $E^{(1)}$是关于 P_1 的期望. 令

$$\mathscr{F}_{n,l}=\sigma\left(\xi_1(t_k^{(n)}):k\leqslant l\right).$$

我们有

$$\begin{aligned}
&E^{(1)}\left(\prod_{n>k>l}\rho(t_k^{(n)})\mid\mathscr{F}_{n,l+1}\right)\\
&\quad=E^{(1)}\left(\prod_{n-1>k>l}\rho(t_k^{(n)})E^{(1)}\left(\rho\left(t_{n-1}^{(n)}\right)\mid\mathscr{F}_{n,n-1}\right)\mid\mathscr{F}_{n,l+1}\right)\\
&\quad=E^{(1)}\left(\prod_{n-1>k>l}\rho(t_k^{(n)})\mid\mathscr{F}_{n,l+1}\right)=\cdots\\
&\quad=E^{(1)}\left(\rho(t_{l+1}^{(n)})\mid\mathscr{F}_{n,l+1}\right)=1.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
E^{(1)}(\rho_n\log\rho_n)&=E^{(1)}\left(\sum_{l=0}^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\rho(t_k^{(n)})\log\rho(t_l^{(n)})\right)\\
&=\sum_{l=0}^{n-1}E^{(1)}\left[\left(\prod_{k<l}\rho(t_k^{(n)})\right)\rho(t_l^{(n)})\log\rho(t_l^{(n)})\right.\\
&\qquad\left.\cdot E^{(1)}\left(\prod_{k>l}\rho(t_k^{(n)})\mid\mathscr{F}_{n,l+1}\right)\right]\\
&=\sum_{l=0}^{n-1}E^{(1)}\left[\left(\prod_{k<l}\rho(t_k^{(n)})\right)\rho(t_l^{(n)})\log\rho(t_l^{(n)})\right]\\
&=\sum_{l=0}^{n-1}E^{(1)}\left[\left(\prod_{k<l}\rho(t_k^{(n)})\right)E^{(1)}(\rho(t_l^{(n)})\log\rho(t_l^{(n)})\mid\mathscr{F}_{n,l})\right]\\
&=\sum_{l=0}^{n-1}E^{(1)}\left(\prod_{k=l}\rho(t_k^{(n)})\right)\cdot C\left(t_{l+1}^{(n)}-t_l^{(n)}\right)\\
&\leqslant\sum_{l=0}^{n-1}C\left(t_{l+1}^{(n)}-t_l^{(n)}\right)=CT.
\end{aligned}$$

由此(0.29)正确,用 3°便得 $P_2\ll P_1$.

附录Ⅳ　非退化扩散过程的强大数律

定理 0.1　设 ξ_t 是定理 8.3 中的扩散过程,又若它满足

(S_1) ξ_t 的转移函数 $P(t,x,\Gamma)$对 dy 有正的密度函数

$$p(t,x,y)>0 \quad (\forall\ t>0, x,y\in \boldsymbol{R}^d);$$

(S_2) 存在$(\boldsymbol{R}^d,\mathscr{B}(\boldsymbol{R}^d))$上对 Lebesgue 测度有正密度 ψ 的不变概率测度 μ:$\forall\ A\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}^d)$有

$$\mu(A)=\int P(t,x,A)\mu(\mathrm{d}x),$$

且 ξ_t在初分布μ下是遍历的平稳过程. 那末由任意初分布μ_0及$P(t,x,A)$生成的 Markov 过程$(0\leqslant t\leqslant T)$的测度 P_{μ_0}及任意有界 Borel 可测函数 f,恒有

$$P_{\mu_0}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(\xi_t)\mathrm{d}t \xrightarrow{T\to\infty} \int f\mathrm{d}\mu\right)=1.$$

注:若

$$\gamma_1 I\leqslant(a_{ij}(x))\leqslant\gamma_2 I,\ \gamma_1>0$$

则(S_1)成立. 又若 $L^* u=0$ 有一个可积的正解 u,则(S_2)成立,且 $\psi=\dfrac{u}{\int u(x)\mathrm{d}x}$.
这些事实的证明尚需一些附加知识,所以我们略去了它们的证明.

定理的证明:

先设 μ_0 有正密度函数 ψ,这时 $\mu_0\ll\mu$. 由附录Ⅲ 1°的推论得到 $P_{\mu_0}\ll P_\mu$. 记

$$\Lambda\triangleq\left\{\omega:\frac{1}{T}\int_0^T f(\xi_t(\omega))\mathrm{d}t\longrightarrow\int f\mathrm{d}\mu\right\}.$$

由于 ξ_t 在 P_μ 下是遍历的平稳过程,从而 $f(\xi_t)$在 P_μ 下是遍历的有界平稳过程,因此强大数律成立,即

$$P_\mu(\Lambda^c)=0.$$

但是 $P_{\mu_0}\ll P_\mu$,故而 $P_{\mu_0}(\Lambda^c)=0$,即 $P_{\mu_0}(\Lambda)=1$.

其次,我们设 $\mu_0=\delta_{\{x\}}$,即集中在 x 的点测度. 我们有:对 $t_0>0$

$$\begin{aligned}P_x(\Lambda)&=P_x P_x\left(\frac{1}{T}\int_{t_0}^T f(\xi_t)\mathrm{d}t\to\int f\mathrm{d}\mu\,\middle|\,\mathscr{F}_{t_0}\right)\\&=P_x P_{\xi(t_0)}\left(\frac{1}{T}\int_0^{T-t_0} f(\xi_t)\mathrm{d}t\to\int f\mathrm{d}\mu\right)\\&=P_x P_{\xi(t_0)}(\Lambda).\end{aligned}$$

但是$\xi(t_0)$的分布关于Lebesgue测度dy有正的密度函数$p(t_0,x,y)$，由第一段的讨论可得到$P_{\xi(t_0)}(\Lambda)=1$，从而$P_x(\Lambda)=1$.

对一般的μ_0只要注意

$$P_{\mu_0}(\Lambda)=\int P_x(\Lambda)\mu_0(\mathrm{d}x)=1,$$

便完成了定理的证明.

推论 $\frac{1}{T}\int_0^T P(t,x,\Gamma)\mathrm{d}t\xrightarrow{T\to\infty}\mu(\Gamma)$.

证明 令$f=I_\Gamma$，取$E_x(\ )$，用有界收敛性.

注:事实上还有$p(t,x,y)\xrightarrow[(t\to\infty)]{L_1}\phi(y)$对$x$局部一致[V1].

一 般 记 号

$(\Omega,\mathscr{F},P)$　　概率空间

$(\mathscr{S},\Sigma)$　　可测空间

$(X,\mathscr{B})$　　Polish 空间

$(\boldsymbol{R}^n,\mathscr{B}^n)$　　$\boldsymbol{R}^n$ 上 Borel 可测空间

$a^+;a$　　正部;负部

$a\wedge b$　　a,b 中小者

$\mathscr{A};\widetilde{\mathscr{A}}$　　生成元,弱生成元

$\mathscr{D}(\mathscr{A}),\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{A}})$　　定义域

$\mathscr{B}$　　有界可测函数类

$\mathscr{B}_0;\widetilde{\mathscr{B}}_0$　　强连续中心;弱连续中心

$\mathscr{B}^T$　　$\boldsymbol{R}^T$ 中由柱集生成的 σ-代数

$\mathscr{B}^-$　　$\boldsymbol{R}^+$ 上的 Borel 集类

$\mathscr{B}(C[0,1])$　　$C[0,1]$上由开集类生成的 σ-代数

$\mathscr{B}(D(\boldsymbol{R}^+))$　　$D(\boldsymbol{R}^+)$上由开集类生成的 σ-代数

$C(T);C_b(T)$　　T 上连续函数类,有界连续函数类

$C(T\to S)$　　取值 S 的 T 上连续函数类

$C_0(r_1,r_2)$　　在 r_1,r_2 处为 0 的连续函数类

C_0^2　　二阶可微,紧支集连续函数族

$C_0^\infty(r_1,r_2)$　　无穷可微,紧支集函数类

$D(T)$　　T 上右连续有左极限的函数类

$D(T\to S)$　　取值 S 的 T 上右连左极函数类

$E_i(\ \ ),P_i(\ \ )$　　初值为 i 的概率,期望

$\mathscr{F}_\sigma;\mathscr{F}_{\sigma+}$　　停时 σ 的事前 σ-代数;宽停时 σ 的事前 σ-代数

$1_A(\cdot)$　　集合 A 的特征函数

$\mu\ll\nu$　　测度 μ 对 ν 绝对连续

$\longrightarrow$	可达
$\longleftrightarrow$	互通
θ_t	推移算子
$\eta\in\mathscr{F}$	函数 η 为 $\mathscr{F}$ 可测
$\#\{\ \}$	集合{ }中元素的个数

特殊记号首次出现的页码数

名 词 索 引

（按汉语拼音及英语字母次序）

T

W

X

Y

Z

参考书目

[B] P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, John Wiley and Sons, 1968.

[B_1] P. Billingsley, Ergordic Theory and Information, J. Wiley, 1965.

[BG] R. M. Blumenthul and R. K. Getoor, Markov processes and potential theory, Academic press, 1968.

[BW] R. N. Bhattacharya and E. C. Waimire, Stochastic processes with applications, John Wiley & Sons, Inc, 1990.

[C] K. L. Chung, Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, Springer-Verlag, Berlin, 1960.

[Ch] M. F. Chen, From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems, World Scientific, 1992.

[CK] A. B. Скороход, случайные процессы с независимыми приращениями, москва, 1964.

[D_1] R. Durrett, Lecture Notes on Partical Systems and Percolation, Wadsworth & Brooks/Cole, 1988.

[D_2] R. Durrett, Brownian Motion and Martingales in Analysis, Wadsworth Advanced, 1984.

[Dai] 戴永隆,《随机点过程》,中山大学出版社,1984.

[Do] Doob, Stochastic processes, 1951.

[DV] D. J. Daley, D. Vere-Jones, An Introduction to the Theory of Point Processes, Springer, 1988.

[Dy] E. B. Dynkin, Markov Precesses, Vol 1, 2, Springer-Verlag, 1965.

[F] A. Friedman, Stochastic Differential Equations and Applications, Vol 1,2, Academic Press, 1975(有中译本,吴让泉译).

[Fd] D. Freedman, Brownian Motion and Diffusion, Springer-Verlag, 1983.

[G] 龚光鲁,《随机微分方程引论》第二版,北京大学出版社,1995.

[Ge] H.-O. Georgii, Gibbs Measures and Phase Transitions, Walter de Gruyter, 1988.

[GS] I. I. Gihman and A. V. Skorohod, The theory of Stochastic Processes Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Springer-Verlag, 1979.

[H] 侯振挺、郭青峰,《齐次可列马尔可夫过程》,科学出版社,1978.

[He] 何声武,《随机过程导论》,华东师范大学出版社,1989.

[Hi] T. Hida, Brownian Motion, Springer-Verlag, 1980.

[I_1] 伊籐清,《概率论》(刘璋温译),科学出版社,1963.

[I_2] 伊籐清,《随机过程》(刘璋温译),上海科学出版社,1961.

[K] John L. Kelley, General Topology, 1955.

[Ka] O. Kallenberg, Random Measures, Academic Press, 1976.

[KS] I. Karatzas and S. E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic calculus, Springer-verlag, 1987.

[KT] S. Karlin and H. M. Taylor, A Second (first) Course in Stochastic Processes, Academic Press, 1981(1975).

[L] T. Liggett, Interacting Partical Systems, Springer-Verlag, 1985.

[Lo] M. Loève, Probability Theory Ⅰ, Ⅱ, Springer-Verlag, 1977, 1978.

[LW] 李漳南、吴荣,《随机过程教程》,高等教育出版社,1987.

[M] R. Mane, Ergodic Theory and Differentiable Dynamics, Springer-Verlag, 1987.

[P] C. J. Preston, Random Fields, Lecture Note in Math No. 534, Springer-Verlag, 1976. (有中译本,严士健等译).

[Pe] K. Petersen, Ergodic Theory, Cambridge Univ Press, 1983.

[PS] S. Port and C. Stone, Brownian Motion and Classical Potential Theory, Academic Press, 1978.

[R] D. Revuz, Markov Chains North Holland, 1984.

[Ro] Ross, Stochastic Processes, John Wiley, 1983(有中译本,何声武、谢盛荣、程依明译).

[S] B. Simon, Functional Integration and Quantum physics. Academic Press, 1979.

[Si] Ya. Sinai, Theory of Phase Transitions: Rigorous Results, Akedémiai Kiadó. Budapest, 1982.

[Sn] D. L. Snyder(梁之舜、邓永录译),《随机点过程》,人民教育出版社,1981.

[SV] D. Stroock and S. Varadhan, *Multidimentional* diffusion Processes, Springer-Verlag, 1979.

[V] S. Varadhan, Lectures on Diffusion Problems and Partial Differential Equations. Tata Inst. of Fund. Res, Bombay, Springer-Verlag, 1980.

[V_1] S. Varadhan, Stochastic Processes, Courant Institute, 1968.

[W₁] 王梓坤,《生灭过程与马尔科夫链》,科学出版社,1980.
[W₂] 王梓坤,《随机过程论》,科学出版社,1965.
[We] A. Wentzell, A Course in the Theory of Stochastic Processes, McGraw-Hill Inc, 1981.
[Wg] 汪嘉冈,《现代概率论基础》,复旦大学出版社,1988.
[Ws] 王寿仁,《概率论基础和随机过程》,科学出版社,1986.
[Wt] P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Springer-Verlag, New York, 1982.
[Y] 杨向群,《可列马尔可夫过程构造论》,湖南科技出版社,1984.
[Yn₁] 严加安,《鞅与随机积分引论》,上海科技出版社,1981.
[Yn₂] 严加安,《测度与积分》,陕西师范大学出版社,1988.
[Yo] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, 1965.
[YWL] 严士健、王隽骧、刘秀芳,《概率论基础》,科学出版社,1982.